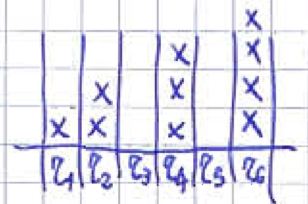
GIANLUIGI FERRARI
SEDE SCIENTIFICA
PALAZZINA 2
TEL. 0521 906513
EMAIL: gianluigi.ferrari@unipr.it

1° COMPITINO : SABATO 19 APRILE
2° COMPITINO : VENERDÌ 13 GIUGNO
9.00 - 12.00

Esempio

Lancio del dado ⚀ ... ⚅ N=10 lanci del dado



→ ESPERIMENTO $\underbrace{\text{ALEA}}$TORIO
dal latino "dado"

10 ESECUZIONI DELL'ESPERIMENTO o PROVE

I risultati dell'esperimento devono essere noti a priori.
L'esperimento deve essere ripetibile.

N=10 → 100, 1000, 10000

aumentando le esecuzioni, le colonne dell'istogramma tendono a normalizzarsi.

FREQUENZA RELATIVA → numero di volte in cui è venuto il risultato i-esimo diviso il numero di lanci. $f_i = \frac{n_i}{N} \in [0,1]$

$f_1 + f_2 + \ldots + f_6 = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_6}{N} = 1$ PROPRIETÀ DI NORMALIZZAZIONE

$\lim_{N \to +\infty} f_i = \hat{f} \ \forall i$ al limite $(N \to +\infty)$, $\hat{f} + \hat{f} + \ldots + \hat{f} = 1 \Rightarrow \hat{f} = \frac{1}{6}$

REGOLARITÀ STATISTICA

TEORIA ASSIOMATICA → diamo alcuni assiomi (1933 - Kolmogoroff).

SPAZIO CAMPIONE → insieme dei risultati noti a priori dell'esperimento

ESP	S
Lancio del dado	$\{z_1, \ldots, z_6\}$
Lancio di 2 monete	$\{(T,T), (T,C), (C,T), (C,C)\}$
Estrazione di una carta da un mazzo di 52	$\{\underbrace{1_c, 2_c, \ldots, K_c}_{13 \text{ carte seme}}, 1_a, \ldots\}$

Scelta di un intero > 100 $S = \{101, 102, \dots\}$ → S ha un numero infinito numerabile di elementi.

Misura della durata di una lampadina $S = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t < \infty\}$

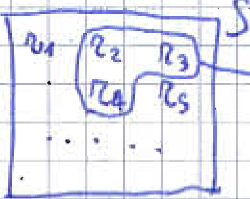
↳ S ha un numero infinito non numerabile di elementi.

EVENTO → sottoinsieme di S

E contiene alcuni <u>risultati</u> di S

↳ sono detti favorevoli ad E

DIAGRAMMA DI VENN

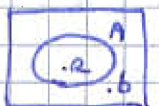


→ $E = \{r_2, r_3, r_4\}$

i) E = "faccia pari" = $\{r_2, r_4, r_6\}$ evento descritto a parole.

ii) "testa sulla prima moneta" = $\{(T,T), (T,C)\}$

INSIEMI ED EVENTI



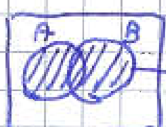
$a \in A$ → a appartiene ad A $\{a\} \subset A$

$b \notin A$ → b non appartiene ad A

$A \subset B$ → A appartiene a B

$a \in A \Rightarrow a \in B$

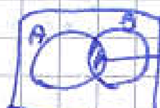
$$A = B \iff \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$$



→ $A \cup B$ → $a \in A \cup B$

$a \in A$ o $a \in B$ o $a \in A \cap B$

$A + B$

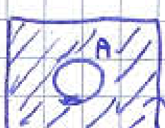


→ $a \in A \cap B$

$\begin{cases} a \in A \\ a \in B \end{cases}$ ↓ $A \cdot B$

A e B sono disgiunti se $A \cap B = \emptyset$

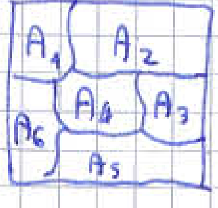
L'insieme vuoto è sottoinsieme di qualunque insieme



→ A^c complemento di A $A \cup A^c = S$ $A^c = \bar{A}$

Si dice <u>partizione</u> di S è una classe di sottoinsieme non vuoti $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ tali che:

$$\begin{cases} A_i A_j = \emptyset & \forall i \neq j \\ A_1 + A_2 + \dots + A_n = S \end{cases}$$



LEGGI DI DE MORGAN

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c \qquad \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$$

$S \Rightarrow$ evento certo.

$\phi \to$ evento impossibile

$A \cup B \Rightarrow$ si verifica se si verifica A o B o entrambi.

$A \cap B \Rightarrow$ si verifica se si verifica sia A che B.

$AB = \phi \to A$ e B sono mutuamente esclusivi.

$A \subset B \Rightarrow$ se si verifica A allora si verifica B

L'insieme di tutti gli eventi si dice CLASSE degli eventi e si indica con $\mathcal{F}$. Un elemento di $\mathcal{F}$ non è un risultato sperimentale, ma è un evento.

Assumeremo che se si hanno degli eventi e si fanno operazioni di $\cup$, $\cap$, ^{c}, si ottiene ancora un evento. In questo caso, la classe $\mathcal{F}$ si chiama CAMPO o ALGEBRA.

Supponiamo che questa proprietà valga in spazi infiniti. Si dice che $\mathcal{F}$ è una σ-algebra.
↳ sigma

LANCIO DI UN DADO

$S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ $\qquad \mathcal{F} = \{\phi, \{e_1\}, \{e_2\}, \dots, \{e_1, e_2\}, \dots, \{e_1, e_2, e_3\} \dots\}$

64 elementi $= 2^6$.

FREQUENZA RELATIVA

N esecuzioni dell'esperimento

$n(\varepsilon) \Rightarrow$ numero di volte in cui si verifica ε su N prove $[n(\varepsilon, \overset{\text{sottintesa}}{N})]$.

$f_N(\varepsilon) \triangleq \dfrac{n(\varepsilon)}{N}$

↳ uguale per definizione

$f_N : \mathcal{F} \to ([0,1])\ \mathbb{R} \qquad 0 \le n(\varepsilon) \le N$

Gode delle seguenti proprietà:

- $f_N(S) = 1$
- $f_N(\varepsilon) \geq 0$
- $A, B \in \mathcal{F}$ tali che $AB = \phi \Rightarrow f_N(A \cup B) = f_N(A) + f_N(B)$

PROBABILITÀ

$$P(\mathcal{E}) = \lim_{N \to +\infty} f_N(\mathcal{E})$$

DEFINIZIONE

La probabilità è una funzione reale definita sulla classe degli eventi $P: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ che soddisfa le 3 seguenti proprietà (assiomi)

1. $P(S) = 1$
2. $P(\mathcal{E}) \geq 0 \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{F}$
3. Per ogni sequenza $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots \in \mathcal{F}$ tali che $\mathcal{E}_i \mathcal{E}_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

   $\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\mathcal{E}_i)$

Non si può MAI avere una probabilità negativa. La probabilità è un numero!

Se $\mathcal{F}$ è σ-algebra e valgono 2 e 3, allora $\mathcal{F}$ è una misura. Se vale anche la 1, $\mathcal{F}$ è una MISURA NORMALIZZATA.

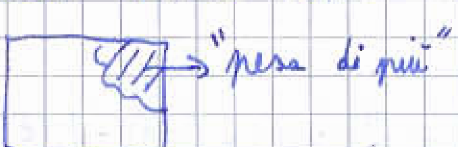
Esempi di misura

1. Conteggio : $C: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ C "numero di risultati sperimentali che cade in un insieme". C NON è una probabilità perché viola la proprietà 1. $C(\{z_1, z_2, z_3\}) = 3$.

2. Lunghezza $S = \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ Il più piccolo insieme contenente tutti i possibili eventi è il Campo di Borel $= \mathcal{F}$

   $\mathcal{L}: \mathcal{B} \to \mathbb{R}$

3. Area $A: \mathcal{B}^2 \to \mathbb{R}$
4. Volume $V: \mathcal{B}^3 \to \mathbb{R}$
5. Peso $P: \mathcal{B}^3 \to \mathbb{R}$ Molto legato all'idea di probabilità.



ES. 2.1

Tombola → n° da 1 a 90

Si estrae un numero a caso (nessun numero preferito) → SPAZIO CAMPIONE UNIFORME

Probabilità che tale numero sia divisibile per 2 o per 5.

$A = \{\text{numero divisibile per } 2\}$ $B = \{\text{numero divisibile per } 5\}$

$P(A \cup B) = ?$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$ $AB = \{\text{numeri divisibili per } 10\}$

$$= \frac{\#\text{ris. fav. } A}{\#\text{ risult. totale}} + \frac{\#\text{ris. fav. } B}{\#\text{ totale}} - \frac{\#\text{ris. fav } AB}{\#\text{ris. tot.}} =$$

$$= \frac{45}{90} + \frac{90/5}{90} - \frac{90/10}{90} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{5+2-1}{10} = \frac{3}{5}$$

A CASA Considerare Tombola con 88 numeri.

ES. 2.2

Lancio due dadi. $A = \{\text{somma delle facce è } 7\}$ $P(A) = ?$

$$S = \left\{\begin{array}{llllll} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & \dots & & & (2,5) & (2,6), \\ \vdots & & & (3,4) & & \\ & & (4,3) & & & \\ & (5,2) & & & & \\ (6,1), & & & & & (6,6) \end{array}\right\}$$

$$P(A) = \frac{\#\text{ris. fav. } A}{\#\text{ris tot.}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

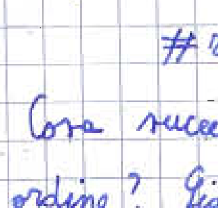
Cosa succede se guardo le facce senza ordine? Siamo ancora in un S uniforme

ES.

Urna con 6 palline blu e 5 rosse. Estraggo a caso 2 palline.

$A = \{\text{una blu e una rossa}\}$

Numeriamo le palline da 1 a 11.



Risultato sperimentale ⇒ (P_i, P_j) — 1ª palla, 2ª pa[lla]

Gli eventi elementari sono equiprobabili → S uniforme → $P(A) = \frac{\#\text{ris fav. } A}{\#\text{ totali}}$

Per contare bene si ricorre al calcolo combinatorio

PRINCIPIO DI ANALISI COMBINATORIA

Dati n oggetti distinguibili, il numero N di sequenze ordinate (liste) di K oggetti scelti fra gli n è:

$$\boxed{N = N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_K}$$

dove N_i è il numero di scelte all'i-esimo passo, scelte le prime $i-1$ componenti. $K \leq N$

$\#$ foglie $= N_1 \cdot N_2$ FOGLIA $\rightarrow$ sequenza ordinata

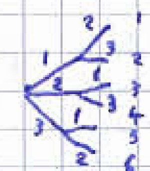
ALBERO DELLE SCELTE

DISPOSIZIONI SEMPLICI

Dati n oggetti distinguibili, il numero di sequenze ordinate differenti di K oggetti, con $K \leq n$, dette DISPOSIZIONI SEMPLICI di n oggetti di classe K, è $D_{n,K} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-K+1)$

ES.

$n=3$ palline numerate. Quante sono le sequenze ordinate di 3 elementi di classe 2? $D_{3,2} = 3 \cdot (3-1) = 6$.



PERMUTAZIONI

Se $n=K$, le disposizioni semplici si dicono permutazioni:

$$P_n = D_{n,n} = n(n-1) \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

Dati n oggetti distinguibili, si fanno K estrazioni successive rimettendo la pallina nella scatola. $D^*_{n,K} = \underbrace{n \cdot n \ldots n}_{K \text{ volte}} = n^K$ K può essere $\geq n$. $\forall K$.

ES.

3 palline $D^*_{3,3} = 3^3 = 27$

TEORIA ASSIOMATICA DELLA PROBABILITÀ

1) Si parte da un esperimento con S

$\downarrow$

Si introduce la classe degli eventi $\mathcal{F}$ (insieme di tutti gli eventi "misurabili").

$\downarrow$

Si definisce $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$. Operativamente si definisce il valore di P su una classe "ristretta".

2) Si calcola la probabilità di un qualsiasi evento

ESEMPIO

Lancio del dado

$\downarrow$

Classe ristretta $\rightarrow$ Eventi elementari (contiene un solo risultato sperim.)

Decidiamo $P\{r_1\} = P\{r_2\} = \dots = P\{r_6\} = \hat{P}$

$$\left.\begin{array}{l} \{r_i\} \cap \{r_j\} = \phi \quad \forall i \neq j \\ \bigcup_{i=1}^{6} \{r_i\} = S \end{array}\right\} \rightarrow \text{partizione}$$

$$\underbrace{P(S) = 1}_{\text{DA ASSIOMA 1}} = P\left(\bigcup_{i=1}^{6} \{r_i\}\right) \underbrace{=}_{\text{DA ASSIOMA 3}} \sum_{i=1}^{6} P\{r_i\} \overset{\times\ \text{DECISIONE}}{=} \sum_{i=1}^{6} \hat{P} = 6\hat{P} \Rightarrow \hat{P} = \frac{1}{6}$$

Nel caso di esperimenti con spazi campione finiti o infiniti numerabili, la classe ristretta che fa comodo è la classe degli eventi elementari.

$$\mathcal{E} = \{r_1, \dots, r_n\} = \{r_1\} \cup \{r_2\} \dots \qquad P(\mathcal{E}) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{r_n\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P\{r_i\} = P\{r_1\} + \dots$$

$$A = \text{"faccia pari"} = \{r_2, r_4, r_6\} \qquad P(A) = P\{r_2\} + P\{r_4\} + P\{r_6\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

CONSEGUENZE ASSIOMI

① Nota $P(\mathcal{E})$. Allora $P(\mathcal{E}^c) = 1 - P(\mathcal{E})$

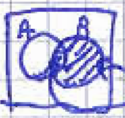
DIM $S = \mathcal{E} \cup \mathcal{E}^c$ (eventi) $\qquad 1 = P(S) = P(\mathcal{E} \cup \mathcal{E}^c) = P(\mathcal{E}) + P(\mathcal{E}^c) \qquad P(\mathcal{E}^c) = 1 - P(\mathcal{E})$

$\Downarrow$

$P(\phi) = 0 \rightarrow \phi = S^c \quad P(\phi) = 1 - P(S) = 1 - 1 = 0.$

② Dati A e B, vale sempre $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$

DIM



$B = S\cdot B = (A\cup A^c)\cdot B = AB \cup A^cB$ eventi disgiunti

$P(B)=P(AB)+P(A^cB)$ $\quad P(A^cB)=P(B)-P(AB)$

$A\cup B = A\cup(AB \cup A^cB) = \underbrace{(A\cup AB)}_{A}\cup A^cB = A\cup A^cB$ eventi disgiunti

$P(A\cup B)=P(A)+P(A^cB)$ $\quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ c.v.d.

$P(AB)\geq 0 \Rightarrow \boxed{P(A\cup B)\leq P(A)+P(B)}$ $\quad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\leq \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$ BOUND D'UNIONE

A CASA < grafico, assiomi (induzione)

$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

③ Dati due eventi A e B con $A\subset B \Rightarrow P(A)\leq P(B)$

DIM

$\underset{\text{SEMPRE VERA}}{B = AB \cup A^cB} = A\cup A^cB$ eventi disgiunti

$P(B)=P(A)+P(A^cB) \rightarrow \geq 0$ per a_2 $\Rightarrow P(B)\geq P(A)$ c.v.d.

SPAZI CAMPIONE UNIFORMI

S finito con N elementi $\quad S=\{1,2,\dots,N\}$

Supponiamo che gli eventi elementari siano equiprobabili (uniformi)

cioè $P\{1\}=\dots=P\{N\}=\hat{p}$

$S=\{1\}\cup\dots\cup\{N\}$ $\quad 1=P(S)=\sum_{i=1}^{N} P\{i\} = \sum_{i=1}^{N}\hat{p} = N\hat{p} \Rightarrow \hat{p}=\frac{1}{N}$

$A=\{i_1,i_2,\dots,i_k\}$ k risultati sperimentali distinti → n° elementi di A

$P(A)$? $\quad A=\{i_1\}\cup\{i_2\}\cup\dots\cup\{i_k\}$ $\quad P(A)=P\left(\bigcup_{i=1}^{k}\{i_k\}\right)=\sum_{i=1}^{k} \underbrace{P\{i_k\}}_{\frac{1}{N}} = \frac{k}{N}$

$\Rightarrow \boxed{P(A)=\frac{\#\text{ risultati favorevoli ad } A}{\#\text{ totale risultati di } S}}$

Quanti sottoinsiemi ha uno spazio campione con N risultati?

$S = \{r_1, \ldots, r_N\}$

Un sottoinsieme è rappresentabile come 1 0 0

$\hookrightarrow$ ris. sper. $\hookrightarrow$ non c'è nell'insieme

$\Rightarrow$ è una sequenza di bit.

$\Rightarrow$ Il numero di sottoinsiemi è = al numero di sequenze binarie.

Una sequenza binaria di lunghezza N è data da N estrazioni consecutive (con ripetizione) di $n = 2$ oggetti.

NUMERO DI SOTTOINSIEMI $= D^*_{2,N} = 2^N$ La classe degli eventi $\mathcal{F}$ di un esperimento con uno spazio campione con N oggetti ha 2^N elementi.

COMBINAZIONI SEMPLICI

Dati n oggetti distinguibili, abbiamo visto che ci sono $D_{n,K} = n \cdot \ldots \cdot (n-K$

Tra le disposizioni semplici, vi sono dei sottogruppi con gli stessi K oggetti ordinati in modo diverso, formati da K! elementi.

Le COMBINAZIONI SEMPLICI differiscono solo se almeno un oggetto è diverso (non interessa più l'ordine).

$$C_{n,K} = \frac{D_{n,K}}{K!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-K+1)}{K!} \cdot \frac{(n-K)!}{(n-K)!} = \frac{n!}{K!(n-K)!} = \binom{n}{K}$$ COEFF. BINOMI

<u>ES.</u>

Quante sono le sequenze di r interi tali che $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n$

$r \leq n$. $r = 3$ 123 In quanti modi si possono estrarre r interi

237 fra n? $D_{n,r}$

$\vdots$

$\hookrightarrow C_{n,r} = \binom{n}{r}$

COEFFICIENTE BINOMIALE (espansione binomiale di Newton)

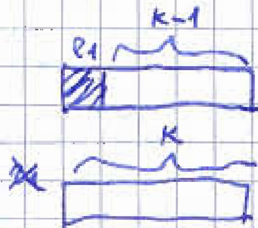
$$(a+b)^n = \sum_{K=1}^{n} \binom{n}{K} a^{n-K} b^K$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad 0! = 1 \qquad \binom{n}{K} = \binom{n}{n-K}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$ Dimostrazione

$C_{n,k}$
- (A) sottogruppo che contiene r_1 C_A
- (B) sottogruppo che non contiene r_1 C_B

} disgiunti



$C_A = \#$ elementi di (A)

$C_B = \#$ elementi di (B)

$$C_{n,k} = C_A + C_B$$

$$C_A = \binom{n-1}{k-1} \qquad C_B = \binom{n-1}{k} \qquad C_{n,k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

11/03/08

ESEMPI

1) Urna 6 blu, 5 rosse. Estrazione a caso di due palline.

$A = \{1\,B \text{ e } 1\,R\} \to P(A)$ $\qquad P(A) = \dfrac{\#\text{ risultati favorevoli ad } A}{\#\text{ ris. totali}}$

a) contiamo con ordine

$(1^\circ P,\ 2^\circ P)$ $\qquad (R_1, B_3) \neq (B_3, R_1)$

$\#$ ris. totale $= 11 \cdot 10$

$\#$ ris. favorevoli $= \underbrace{6 \cdot 5}_{\substack{1^a \text{ BLU} \\ 2^a \text{ ROSSA}}} + \underbrace{5 \cdot 6}_{\substack{1^a \text{ ROSSA} \\ 2^a \text{ BLU}}}$ → gruppi di eventi disgiunti

$$P(A) = \frac{2 \cdot 6 \cdot 5}{11 \cdot 10} = \frac{6}{11} \simeq 0{,}54$$

b) Contiamo senza ordine

$(R_1, B_3) = (B_3, R_1)$

$$\#\text{ ris. totale} = \frac{11 \cdot 10}{2} = \binom{11}{2} = \frac{11!}{2!\,9!} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$$

$$P(A) = \frac{30}{55} = \frac{6}{11} \simeq 0{,}54$$

$\#$ ris. favorevoli $= 6 \cdot 5 = 30$

2) Urna $12 \begin{cases} 3 & N \\ 4 & R \\ 5 & B \end{cases}$ Estrazione a caso di due palline.

$\mathcal{E} = \{$almeno 1 pallina è bianca$\}$ $\quad P(\mathcal{E}) = ?$

$\mathcal{E}_1$ ● ○ ; $\mathcal{E}_2$ ○ ● ; $\mathcal{E}_3$ ● ● } 3 sottogruppi di risultati } disgiunti

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3$$

a) Contiamo con ordine

$\mathcal{E}_1 = 5 \cdot 7$

$\mathcal{E}_2 = 7 \cdot 5$

$\mathcal{E}_3 = 5 \cdot 4$

$\mathcal{E} = 35 + 35 + 20 = 90$

$C_P = 12 \cdot 11$

$C_F = 90$

$$P(\mathcal{E}) = \frac{90}{132} = \frac{45}{66} = \frac{15}{22}$$

b) Contiamo senza ordine

$C_P = \binom{12}{2} = 66$ $\quad C_F = \underbrace{\#\text{ casi in cui solo 1 è bianca}} + \underbrace{\#\text{ casi in cui entrambe sono bianche}} = 5 \cdot 7 + \underbrace{\frac{5 \cdot 4}{2}}_{\binom{5}{2}} = 45$

$P(\mathcal{E}) = \frac{45}{66} = \frac{15}{22}$

c) $\mathcal{E}^c = \{\text{nessuna bianca}\}$ $\quad P(\mathcal{E}) = 1 - P(\mathcal{E}^c)$ $\quad P(\mathcal{E}^c)_{\text{CON ORDINE}} = \frac{7 \cdot 6}{12 \cdot 11} = \frac{7}{22}$

$P(\mathcal{E}) = 1 - \frac{7}{22} = \frac{15}{22}$

A CASO

Urna 15 B, 10 R, 7 N $\quad$ Estrazione a caso di 3 palline

$\mathcal{E} = \{\text{almeno 1 rossa e almeno 1 bianca}\}$ $\quad P(\mathcal{E}) = ?$ $\left[\frac{225}{248}\right]$

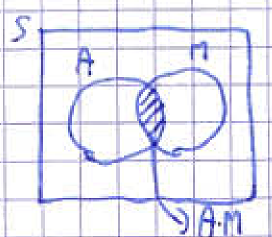
$\#\text{ favorevoli} = \binom{10}{1} \cdot \binom{15}{1} \cdot \binom{30}{1} = \frac{10!}{9!} \cdot \frac{15!}{14!} \cdot \frac{30!}{29!} = 4500$ $\quad \#\text{ possibili} = \binom{32}{3} = \frac{32!}{3!\,29!} = 4960$

$P(\mathcal{E}) = \frac{4500}{4960} = \frac{450}{496} = \frac{225}{248}$.

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Dato un evento M, con $P(M) > 0$, per ogni evento A, si definisce

$$\underset{\text{dato}}{P(A|M)} \triangleq \frac{P(A \cap M)}{P(M)}$$



M → evento condizionante

A → evento condizionato

FREQUENZA RELATIVA

Supponiamo di ripetere un esperimento n volte.

n_A → numero di volte in cui si verifica A

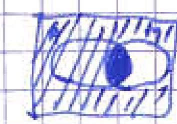
n_M → " " " " " " M

n_{AM} → " " " " " " A·M

$$\frac{P(AM)}{P(M)} \simeq \frac{n_{AM}/n}{n_M/n} = \frac{n_{AM}}{n_M}$$

Guardiamo i casi in cui si è verificato M e dove si è verificato A.

L'universo diventa M.



$P(\cdot|M) : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ è una probabilità. Infatti:

1) $P(S|M) = \frac{P(S \cdot M)}{P(M)} = \frac{P(M)}{P(M)} = 1$

2) $P(A|M) = \frac{P(A \cdot M) \to \geq 0\ (P_2)}{P(M) \to > 0} \geq 0 \quad \forall A$

3) Dati $\{\mathcal{E}_i, i \geq 1\}$ disgiunti, allora

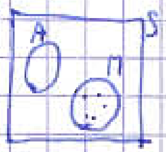
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_i \Big| M\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\mathcal{E}_i|M)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \middle| M\right) \triangleq \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)\cdot M\right)}{P(M)} = \underbrace{\frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i\cdot M)\right)}{P(M)}}_{E_i\cdot M \text{ sono disgiunti}} \overset{(a_3)}{=} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(E_i\cdot M)}{P(M)} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{P(E_i\cdot M)}{P(M)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i|M)$$

$P(A) \Rightarrow$ probabilità "a priori" di A

$P(A|M) \Rightarrow$ probabilità "a posteriori" di A

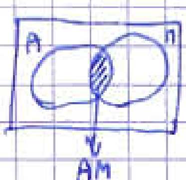
$P(\cdot|M) \Rightarrow$ "schiaccia" a 0 le probabilità di qualsiasi evento A disgiunto da M.



$$P(A|M) = 0 . \quad \frac{P(A\cap M)}{P(M)} \xrightarrow{\text{xké disgiunti}} \frac{P(\emptyset)}{P(M)} = 0 .$$

- Se A e B sono inclusi in M ($A\subset M$, $B\subset M$), allora la probabilità condizionata riscala le probabilità a priori, ma il rapporto rimane uguale.

$$\frac{P(A|M)}{P(B|M)} = \frac{P(AM)/\cancel{P(M)}}{P(BM)/\cancel{P(M)}} \overset{P(AM)=P(A)}{=} \frac{P(A)}{P(B)}$$



$$A = \underbrace{A\cdot M \cup AM^c}_{\text{DISGIUNTI}} \qquad P(A|M) = P(AM|M) + P(AM^c|M)$$

0 perché se si è verificato M è impossibile che si sia verificato M^c.

$$P(A|M) = P(AM|M)$$

ESEMPIO

Lancio di 2 dadi. Si è verificato $M = \{\text{primo dado vale } 2\}$

$\Rightarrow$ Quanto vale $P(A|M)$; $A = \{\text{somma dei dati è } 7\}$?

$AM = \{\text{somma è 7 } \underline{e} \text{ primo dado è } 2\} = \{(2,5)\}$

$$P(A|M) = \frac{P(AM)}{P(M)} = \frac{\frac{\#\text{ ris. fav. } AM}{\#\text{ tot}}}{\frac{\#\text{ ris. fav. } M}{\#\text{ tot}}} = \frac{1}{6}$$

Dato che si è verificato M, si è verificato uno dei 6 risultati $(2,1)$ $(2,2)$ $(2,3)$ $(2,4)$ $(2,5)$ $(2,6)$

Definiamo $S' = M$ spazio campione uniforme

$$P(A|M) = \frac{\#\text{ ris. fav. ad } A \text{ in } S'}{\#\text{ ris. tot. di } S'} = \frac{1}{6}$$

ESEMPIO

Gioco bridge. 52 carte

Alla 1ª mano si dividono le carte fra 4 giocatori $O \overset{N}{\underset{S}{+}} E$

È noto l'evento $M = \{(N,S) \text{ possiede } 8P\}$

Qual è la probabilità di $A = \{E \text{ ha } 3P\}$? Cioè, $P(A|M)$?

A CASA per definizione $\dfrac{P(AM)}{P(M)}$

13P 33NP

Siccome si è verificato M, cioè (N,S) ha 8 picche e 18 non picche, di sicuro (E,O) $\begin{cases} 13-8=5P \\ 39-18=21NP \end{cases}$; considero uno spazio campione ridotto di 26 carte $\begin{cases} 5P \\ 21NP. \end{cases}$

L'esperimento si riduce in estrazione a caso di 13 carte per est, perché la scelta per ovest è bloccata (le rimanenti).

$$P(A|M) = \frac{\#\text{ ris. fav. a } \{3P\ EST\} \text{ in } S'}{\#\text{ ris. tot. di } S'} \underset{\text{CONTO SENZA ORDINE}}{=} \frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{21}{10}}{\binom{26}{13}} = \frac{\frac{5!}{3!2!}\cdot\frac{21!}{10!11!}}{\frac{26!\,26\cdot25\cdot24\cdot23\cdot22}{13!13!\,12}} \simeq 0{,}339$$

13·12·11

A CASA

i) Calcolare $P(B|M)$ con $B = \{(E \text{ ha } 3P, O \text{ ha } 2P) \cup (E \text{ ha } 2P, O \text{ ha } 3P)\}$ e

ii) $P(C|M)$ con $C = \{(E \text{ ha } 4P, O \text{ ha } 1P) \cup (E \text{ ha } 1P, O \text{ ha } 4P)\}$ e

iii) $P(D|M)$ con $D = \{(E \text{ ha } 5P, O \text{ ha } 0P) \cup (E \text{ ha } 0P, O \text{ ha } 5P)\}$

i) # ris. favorevoli a $\{E\ 3P, O\ 2P\} = \binom{5}{3}\cdot\binom{21}{10}$ $\qquad P(B|M) = \dfrac{\binom{5}{3}\binom{21}{10} + \binom{5}{2}\cdot\binom{21}{11}}{\binom{26}{13}} =$

ris. " " $\{E\ 2P, O\ 3P\} = \binom{5}{2}\cdot\binom{21}{11}$

$$= \frac{\frac{5!}{3!2!}\cdot\frac{21!}{11!10!} + \frac{5!}{2!3!}\cdot\frac{21!}{11!10!}}{\frac{26!}{13!13!}} \simeq 0{,}678$$

ii) $\#\text{fav.} = 2\cdot\binom{5}{4}\cdot\binom{21}{9} = 2\cdot\dfrac{5!}{4!1!}\cdot\dfrac{21!}{9!12!} = 2939300$ $\qquad P(C|M) = \dfrac{2939300}{10400600} \simeq 0{,}28$

21·20·19·18·17·16·15·14·13

8·7·6·5·4·3·2

iii) $\#\text{fav.} = 2\cdot\binom{5}{5}\cdot\binom{21}{9} = 587860$ $\qquad P(D|M) = \dfrac{587860}{10400600} \simeq 0{,}06$

ESPERIMENTI COMPOSITI

Sequenze di sottoesperimenti con sottospazi campione.

esempio

Urna con 6 palline blu e 5 rosse

esperimento = {estrazione 2 palline}

$A = \{1\,B \text{ e } 1\,R\}$

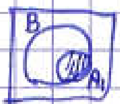
PRIMA: estrazione di due palline assieme

ORA: estrazione di una pallina poi di un'altra. Divisione in 2 sottoesperimenti.

$$\underset{\{1^a B,\ 2^a R\}}{A = A_1} \cup \underset{\{1^a R,\ 2^a B\}}{A_2} \qquad P(A) = P(A_1) + P(A_2)$$

$B = \{$la prima è blu$\} = \{1\,B, 2$ non mi interessa$\} = \{1B, 2B\} \cup \{1B, 2R\}$

$$A_1 = A_1 \cdot B \qquad P(A_1) = P(A_1 \cdot B) = P(A_1|B) \cdot P(B) = \frac{\cancel{6}\,3}{11} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{3}{11}$$



prob. condiz. $= \underbrace{P(B|A_1)}_{1} \cdot P(A_1)$ non serve

$$P(B) = \frac{6}{11} \qquad P(A_1|B) = P\{2^a R \text{ da un'urna di 10 palline con 5 rosse}\} = \frac{\cancel{5}\,1}{\cancel{10}\,2} = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = A_2 \cdot C \Rightarrow P(A_2) = P(A_2 \cdot C) = P(A_2|C) \cdot P(C) = \frac{\cancel{6}\,3}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{5}}{11} = \frac{3}{11}$$

$C = \{$la prima è rossa$\}$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{3}{11} + \frac{3}{11} = \frac{6}{11}$$

Dato un esperimento formato da 2 sottoesperimenti, deve sempre valere

$$S = S_1 \times S_2 \qquad \{r_1, r_2\} = \{r_1\} \times \{r_2\} \qquad \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$$

REGOLA DELLA CATENA (CR: Chein Rule)

Dati n eventi $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$, allora

$$P(\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \dots \mathcal{E}_n) = P(\mathcal{E}_1) \cdot P(\mathcal{E}_2|\mathcal{E}_1) \cdot P(\mathcal{E}_3|\mathcal{E}_2\mathcal{E}_1) \cdot \dots \cdot P(\mathcal{E}_n|\mathcal{E}_{n-1}\mathcal{E}_{n-2}\dots\mathcal{E}_2\mathcal{E}_1)$$

DIM

$$P(\mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_n) \triangleq P(\underset{\mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_{n-1}}{A_{n-1}} \mathcal{E}_n) = P(\mathcal{E}_n|A_{n-1}) \cdot P(A_{n-1}) = P(\mathcal{E}_n|\mathcal{E}_{n-1}\dots\mathcal{E}_1) \cdot P(\mathcal{E}_{n-1}|\overbrace{\mathcal{E}_{n-2}\dots\mathcal{E}_1}^{A_{n-2}}) \dots \text{ e così via}$$

ESEMPIO

A CASA
calcolo combin.

Urna con 10 R, 15 B, 5 N. Estrazione di 3 palline $\mathcal{E}=\{1R, 2B, 3N\}$

$1R \cap 2^a B \cap 3^a N$ $\quad P(\mathcal{E}) = P(1R) \cdot P(2B|1R) \cdot P(3N|1R \cdot 2B)$

$\hookrightarrow 1^a R \times \underbrace{S_2 \times S_3}$ → non mi interessa cosa succede nel secondo e terzo esperimento

$P(1R) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ $\quad P(2B|1R) = \frac{15}{29}$ $\quad P(3N|1R \cdot 2B) = \frac{5}{28}$

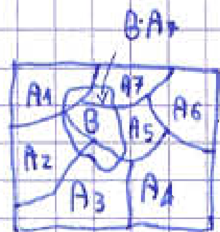
$P(\mathcal{E}) = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{15}\,5}{29} \cdot \frac{5}{28} = \frac{25}{29 \cdot 28} \simeq 0{,}03$

TEOREMA DELLA PROBABILITÀ TOTALE

Dati $\{A_i, i \geq 1\}$ che costituiscono una partizione ($A_i \cdot A_j = \phi$ con $i \neq j$ e $\bigcup_i A_i = S$), allora $\forall B$ (evento) vale $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$

DIM

$B = B \cap S = B \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{B \cdot A_i}_{\text{disgiunti}}$ $\quad BA_i \cdot BA_j = B \underbrace{A_i A_j}_{\phi} B = \phi$



$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B \cdot A_i\right) \underset{(a_3)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B \cdot A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$

ESEMPIO

3 scatole identiche

$S_1 \rightarrow$ 2000 diodi di cui 100 difettosi

$S_2 \rightarrow$ 500 diodi " " 200 "

$S_3 \rightarrow$ 1000 " " " 100 "

ESP: scelta di una scatola a caso e scelta di un diodo a caso.

$B = \{\text{diodo difettoso}\}$

Consideriamo una partizione nel 1° sottoesperimento

$A_1 = \{\text{scelta di scatola } 1\} \times S_2$

$A_2 = \{\text{" " " } 2\} \times S_2$

$A_3 = \{\text{" " " } 3\} \times S_2$ ↳ sottinteso

$P(B) = \underset{\frac{100}{2000}}{P(B|A_1)} \cdot \underset{\frac{1}{3}}{P(A_1)} + \underset{\frac{200}{500}}{P(B|A_2)} \cdot \underset{\frac{1}{3}}{P(A_2)} + \underset{\frac{100}{1000}}{P(B|A_3)} \cdot \underset{\frac{1}{3}}{P(A_3)} =$

$= \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1+8+2}{60} = \frac{11}{60} \simeq 0$

FORMULA DI BAYES

Dati due eventi A e B con $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$

$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B)$

$P(B|A) \cdot P(A)$ $\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$

Per il T. della probabilità totale:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)\cdot P(A_i)}$$

ESEMPIO

Scat 1 → 2000 diodi / 100 difettosi
Scat 2 → 500 " / 200 "
Scat 3 → 1000 " / 100 "

Supponiamo che si verifichi B = {diodo estratto difettoso}. Qual è la scatola da cui è più probabile che provenga?

$$\max_{i=1,2,3} P(A_i|B) \qquad P(A_3|B) = 1 - P(\underset{\text{CAUSA}}{A_1}|\underset{\text{EFFETTO}}{B}) - P(A_2|B)$$

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)\cdot P(A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{100}{2000}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{11}{60}} = \frac{1}{11}$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)\cdot P(A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{200}{500}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{11}{60}} = \frac{8}{11} \qquad P(A_3|B) = 1 - \frac{8}{11} - \frac{1}{11} = \frac{2}{11}$$

INDIPENDENZA

Dati due eventi A e B, diciamo che sono indipendenti se $P(A|B) = P(A)$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow \boxed{P(AB) = P(A)\cdot P(B)}$$

ESEMPIO

Selezione di 1 carta da 52.

A = {carta è un asso}
B = {carta è picche}

A e B sono indipendenti? Sì, perché ci sono gli stessi numeri di carte per seme.

$P(A|B) = P(A)$ o $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \qquad P(A|B) = \frac{1}{13} \qquad P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \qquad P(AB) = \frac{1}{52} = \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{4} \quad \text{VERO}$$

NOTA: se A e B sono indipendenti ⇒ A e B^c sono indipendenti.

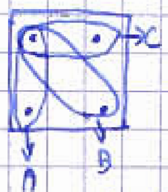
Se A e B sono disgiunti ($AB = \emptyset$), NON sono indipendenti perché se si verifica uno, l'altro non si deve verificare.

Dati n eventi $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sono fra loro indipendenti se per ogni sottosequenza $(E_{i1}, E_{i2}, \ldots, E_{ir})$, con $r \leq n$, vale

$$P(E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_r}) = \prod_{k=1}^{r} P(E_{ik})$$

ESEMPIO

4 risultati equiprobabili



$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad P(ABC) = \frac{1}{4} \neq \underbrace{P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)}_{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}}$$

$\Rightarrow$ A, B e C non sono indipendenti.

NOTA: se A, B e C sono indipendenti, allora A è indipendente da ogni evento "derivato" da B e C $(B^c, B^cC, B^cC^c, C^c \ldots)$.

Due eventi E_1 E_2 si dicono CONDIZIONATAMENTE INDIPENDENTI dato M se $P(E_1E_2|M) = P(E_1|M) \cdot P(E_2|M)$ oppure $P(E_1|E_2M) = P(E_1|M)$

Non è detto che $E_2 \subset M$

28/03/08

PROVE

I sottoesperimenti si dicono indipendenti se $\forall \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ tali eventi sono indipendenti.

Se i sottoesperimenti, oltre ad essere indipendenti, hanno lo stesso spazio campione e la stessa funzione di probabilità, si dicono prove.

ES.

Urna: 10 R, 15 B, 5 N. Estrazione di 3 palline consecutive con reimbussolamento $\Rightarrow$ prove.

Calcolare $P(E)$ $\quad E = \{1^a R, 2^a B, 3^a N\}$

A suo tempo, avevamo fatto $P(E) = P(N|R,B) \cdot P(B|R) \cdot P(R) =$ regola catena

$$= P(N) \cdot P(B) \cdot P(R) =$$ concetto di prove

$$P(N) = \frac{5}{30}, \quad P(B) = \frac{15}{30}, \quad P(R) = \frac{10}{30}$$

$$= \frac{1}{36}$$

PROVE RIPETUTE

Sequenza infinita (numerabile) di prove.

$S' \to$ spazio campione di una prova

$\mathcal{E} \to$ evento in una prova

In una singola prova c'è successo se si verifica $\mathcal{E}$, insuccesso se non si verifica $\mathcal{E}$.

$P(\mathcal{E}) = p$

$1 - P(\mathcal{E}) = 1 - p$

$S_n = \#$ successi su n prove

$A_n = \{$almeno un successo nelle prime n prove$\}$

$T = \#$ prove fino al 1° successo (incluso)

$B_n = \{$esattamente K successi su n prove$\}$ $\quad K \leq n$

$C = \{$il primo successo alla i-esima prova$\}$

Riscrivo gli eventi esplicitamente

I) $A_n = \{S_n \geq 1\}$

II) $B_n = \{S_n = k\}$ $\quad$ Calcolo la probabilità

III) $C = \{T = i\}$ $\quad i \geq 1$

I) $A_n^c = \{$nessun successo su n prove$\} = \{S_n = 0\} = \mathcal{E}^c \mathcal{E}^c \ldots \mathcal{E}^c$

$P(A_n^c) = P(\mathcal{E}^c) \cdot P(\mathcal{E}^c) \cdot \ldots \cdot P(\mathcal{E}^c) = (1-p) \cdot (1-p) \cdot \ldots \cdot (1-p) = (1-p)^n$

$\Rightarrow P(A_n) = 1 - P(A_n^c) = 1 - (1-p)^n$

se $p = 0 \to P(A_n) = 0$

se $p > 0 \to (1-p) < 1 \to \lim_{n \to +\infty} (1-p)^n = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} P(A_n) = 1$

II) In quanti modi si possono avere K successi?

X		...	
1	2	...	n

successo

Quante configurazioni ci sono? 2^n

Quante sono quelle con K successi? $\binom{n}{k}$

Qual è la probabilità di una particolare sequenza di K successi?

X		X	...	X	
1	2	3		n-1	n

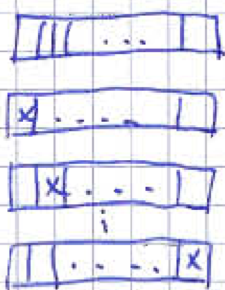
K volte c'è p, $n-K$ volte c'è $1-p$

$p \cdot (1-p) \cdot p \cdot \ldots \cdot p \cdot (1-p) = p^K \cdot (1-p)^{n-K}$ non dipende dalla particolare sequenza di successi, ma solo da K (numero di successi)

Ognuna delle $\binom{n}{k}$ sequenze ha la stessa probabilità $= p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

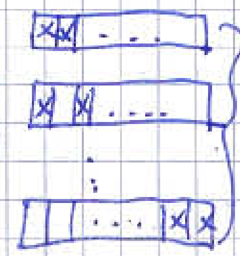
$$P(B_n) = P\Big\{\bigcup_{\substack{i \text{ in} \\ \binom{n}{k} \text{ modi}}} \text{"i-esima sequenza"}\Big\} \underset{(a_3)}{=} \sum_i P\{\text{i-esima sequenza}\} = \sum_i p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$ distribuzione binomiale



0 successi $\binom{n}{0} = 1$

1 successo $\binom{n}{1} = n$



2 successi $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

n successi $\binom{n}{n} = 1$

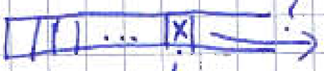
Sommando tutte le probabilità $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \dots + \binom{n}{n}$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n \qquad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 1^i \cdot 1^{n-i} = (1+1)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$$

infatti $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1^n = 1$

(III)



$$\xrightarrow{?} P(C) = \overset{1}{(1-p)} \cdot \overset{2}{(1-p)} \cdot \ldots \overset{i-1}{(1-p)} \cdot \overset{i}{p} \cdot \overbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \ldots}^{\text{tutto quello che viene dopo è indifferente}} = (1-p)^{i-1} \cdot p$$

DISTRIBUZIONE GEOMETRICA

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1} \cdot p = 1 = P\Big\{\bigcup_{i=1}^{\infty} \{1° \text{ successo alla } i^a \text{ prova}\}\Big\} =$$

$$= p \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$$

↳ serie geometrica

ESEMPIO

De Meré aveva chiesto a Pascal: è più facile vincere scommettendo:

A. lanciando 4 volte 1 dado si presenti almeno una volta 6 $p = \frac{1}{6}$

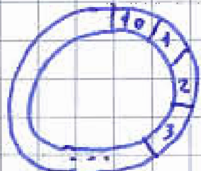
B. lanciando 24 volte 2 dadi si presenti almeno una volta (6, 6) $p_B =$

$A^c = \{$nessun 6 su 4 prove$\}$ $P(A^c) = (1-p)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^4$ $P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0,517$

$P(B^c) = P\{$nessun (6,6) su 24 lanci$\} = (1-p_B)^{24} = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$ $P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0,4914$

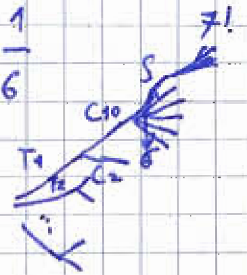
ESERCIZI

1) 10 persone si siedono ad un tavolo rotondo, tra cui Tizio, Caio e Sempronio. Calcolare la probabilità che T e C siano vicini e S non sia vicino a nessuno dei due ($P(A)$)



Il risultato è una particolare configurazione di persone
Esperimento con spazio campione uniforme

$$P(A) = \frac{\#\text{ris. fav. } A}{\#\text{ris. tot.}} = \frac{20 \cdot 6 \cdot 7!}{10!} = \frac{20 \cdot 6^2}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{6}$$



=

1	2	3	. . .	10	1

$\neq \begin{cases} T & C \\ C & T \end{cases}$

T C
C T . . .   T C
            C T

10 gruppi da 2.
$\Rightarrow 20$

Altro modo!

esp: fare sedere T, C, S su 10 posti   ris: sequenza di 3 numeri (posti)

$$P(E) = \frac{\#\text{Ris. fav. } A}{\#\text{ris. tot}} = \frac{20 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{6}$$

far sedere T e C vicini   far sedere S lontano

Provare a contare senza contare le rotazioni.

II) Si gioca a briscola

Qual è la probabilità di A{avere una briscola servita alla 1ª mano}

Esperimento: estrazione di 3 carte in mano e 1 in tavola.

$\boxed{S_1}\boxed{S}\boxed{S_2}$ in mano l'ordine non conta $\boxed{S}$ tavola   S uniforme

$$P(A) = \frac{\#\text{ favorevoli ad } A}{\#\text{ totali}} = \frac{}{\binom{40}{3} \cdot 37}$$

↑ briscola

oppure

$40 \cdot \binom{39}{3}$

$S_1 \neq S$
$S_2 \neq S$

$4 \cdot 10 \cdot 9$

modi x il seme   briscola   briscola in mano

Il prodotto $4 \cdot 10 \cdot 9$ va moltiplicato per la somma:

$$\underbrace{\binom{10}{2} \cdot \underset{\substack{\uparrow\\ \text{seme}}}{3}}_{S_1 = S_2} + \underbrace{\binom{3}{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{seme}}}{2}} \cdot 10^2}_{S_1 \neq S_2} \qquad P(A) = \frac{4 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \left[\frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 3 + \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} \cdot 10^2\right]}{\frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{3 \cdot 2}} \simeq 0{,}046$$

Oppure, moltiplico tutto per $\frac{30 \cdot 29}{2}$, cioè l'estrazione di 2 carte da 30 con ordine. Le carte sono 30 perché scarto quelle della triscola

III) Ci sono n persone in una stanza. $A = \{$almeno 2 persone hanno lo stesso compleanno$\}$.

$A^c = \{$tutti hanno compleanni diversi$\}$ $\qquad$ C_1 compleanno 1ª persona
$\vdots$
C_n " nª persona

$P(A^c) = P\{C_1, C_2, \ldots, C_n$ sono diversi$\} =$ $\qquad$ Persona → prova
Compleanno → risultato

catena

$$= P(C_n \overset{\text{diverso}}{|} C_{n-1}, \ldots C_1) \cdot P(C_{n-1} | C_{n-2} \ldots C_1) \cdots P(C_2 | C_1) \cdot P(C_1) = \frac{365 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} \qquad P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$\frac{365 - (n-1)}{365} \qquad \frac{365 - (n-1) + 1}{365} \qquad \frac{364}{365} \qquad \frac{365}{365} = 1$$

Oppure

$$P(A^c) = \frac{\#\text{ ris. fav. } A}{\#\text{ ris. tot}} = \frac{365 \cdot \ldots (365 - n + 1)}{365^n}$$

esp: estrazione di n numeri indipendenti fra 1 e 365

$P(A) > \frac{1}{2}$ se $n \geq 23$

01/04/2008

ESERCIZIO POKER

52 carte $<$ 4 semi, 13 tipi/seme $\qquad$ esperimento: estrazione a caso di 5 carte dal mazzo

$A = \{$full servito$\}$ $\qquad$ $\boxed{T_1 | T_1 | T_1 | T_2 | T_2}$ $\qquad$ $T_2 \neq T_1$

$$P(A) = \frac{\#\text{ ris. fav. } A}{\#\text{ ris. totali}} = \frac{13 \cdot 12 \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{694}$$

$T_1 < S_{11}, S_{12}, S_{13}$ $\qquad$ $T_2 < S_{21}, S_{22}$

→ modi di scegliere il tipo 1
→ modi di scegliere il tipo 2
→ modi di scegliere 3 carte del seme 1
→ modi di scegliere 2 carte del seme 2

ESEMPIO Lancio dado truccato

$P\{\text{pari}\} = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $P\{\text{dispari}\} = \frac{2}{5}$ $\qquad$ esperimento: lancio dado 3 volte

1° lancio: P → 2° lancio; D → vince B

2° lancio: P → vince A; D → 3° lancio

3° lancio: P → vince A; D → vince B

Chi è più probabile che vince? $R_{is} = \{r_1, r_2, r_3\}$

$P(r_1, r_2, r_3) = P(r_1) \cdot P(r_2) \cdot P(r_3)$

$r_i = \{P, D\}$

$|S| = 2^3 = 8$

$V_A = \{\text{vince } A\} = \{P, P, \underbrace{S'}_{\text{spazio campione singolo lancio}}\} \cup \{P, D, P\}$ = eventi disgiunti

$S' = \{P, D\}$

$P(V_A) = P(P, P, S') + P(P, D, P) = P(P) \cdot P(P) \cdot \underset{1}{P(S')} + P(P) \cdot P(D) \cdot P(P) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot 1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{45+18}{125} = \frac{63}{125}$ ← appena + grande di $\frac{1}{2}$

$P(V_B) = 1 - P(V_A) = 1 - \text{qualcosa} > \frac{1}{2} \Rightarrow$ vince A + probabile

$V_B = \{\text{vince } B\} = \{D, S', S'\} \cup \{P, D, D\}$

$P(V_B) = \frac{2}{5} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{50+12}{125} = \frac{62}{125}$ $\quad V_A > V_B \rightarrow$ è + probabile che vinca A

ESERCIZIO

3 scatole con palline verdi e rosse.

$A \rightarrow n_V = 2 n_R$

$B \rightarrow n_V = \frac{1}{2} n_R$

$C \rightarrow n_V = n_R$

n palle per ogni scatola

ESPERIMENTO = scelta a caso di una scatola seguito dall'estrazione di una pallina.

Il risultato è una pallina verde.

Qual è la probabilità che sia stata scelta B.

$P(B|V)$? Formula di Bayes!

$$P(B|V) = \frac{P(V|B) \cdot P(B)}{P(V)} = \frac{1/3 \cdot 1/3}{1/3\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$P(V|B)$: $\boxed{V|R|R}$ → $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$

$P(B)$: 3 scatole → $\frac{1}{3}$

$P(V)$: PROBABILITÀ TOTALE → $P(V|A) \cdot P(A) + P(V|B) \cdot P(B) + P(V|C) \cdot P(C)$, con $P(V|A) = \frac{2}{3}$, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(V|B) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(V|C) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{3}$

ESERCIZIO

60% degli studenti che si presentano al compitino ha una preparazione sufficiente.
Il compitino è superato dal 95% degli studenti preparati e 10% degli impreparati.
Calcolare a) probabilità che uno studente scelto a caso superi l'esame
b) " " " " che supera l'esame sia impreparato.

ESPERIMENTO: studente → esame → S / NS

studente → P ($\frac{6}{10}$) / I ($\frac{4}{10}$)

$P(S|P) = 0,95 \quad P(NS|P) = 0,05$

$P(S|I) = 0,10 \quad P(NS|I) = 0,90$

a) $P(S) = P(S|I)\cdot P(I) + P(S|R)\cdot P(P) = 0,1\cdot 0,4 + 0,95\cdot 0,6 = 0,61$ molto vicina a $P(P)$

b) $P(I|S) = \dfrac{P(S|I)\cdot P(I)}{P(S)} = \dfrac{0,1\cdot 0,4}{0,61} = 0,065$

SPAZI CONTINUI

Spazi campione che hanno un'infinità non numerabile di elementi. Si distinguono in:

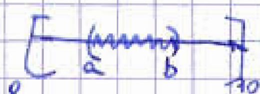
- UNIFORMI
- NON UNIFORMI

ESEMPIO

Esperimento → scelta a caso di un punto sull'asse reale in $S=[0,10]$

La classe degli eventi in $\mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathbb{R})$

La classe degli eventi in $S \to \mathcal{B}([0,10])$



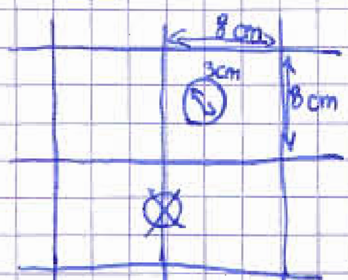
$P(x: a<x<b) = ?$ $\quad P\{0\le x\le 10\} = 1$

$P\{x: a\le x<b\} = \dfrac{l((a,b))}{l([0,10])} = \dfrac{b-a}{10}$ lunghezza degli intervalli $\left[= \dfrac{\#\text{ris. fav.}}{\#\text{ris. tot.}}\right]$ con la differenza che # è infinito

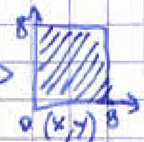
$P\{x=x_i\} = \dfrac{l(\{u_i\})}{10} = \dfrac{0}{10} = 0$ } assurdo? no perché gli elementi non sono numerabili. Non ha senso $\sum_i P\{u_i\}$.

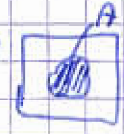
ESEMPIO

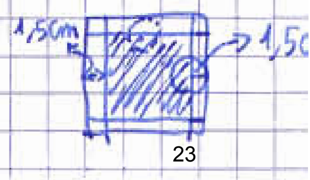
Lancio a caso di una moneta circolare da 1€ di diametro 3 cm. Pavimento con piastrelle quadrate di lato 8 cm. Qual è la probabilità che la moneta sia completamente interna a una piastrella



Considero il caso in cui il centro della moneta cada in una piastrella (così non mi interessa il numero di piastrelle).

Esperimento: estrazione a caso del centro della moneta su una piastrella. $S \to$ 

$P\{(x,y)\in A\}$? 



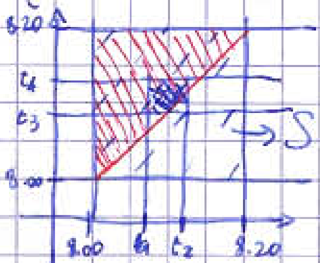
$P\{(x,y)\in A\} = \dfrac{\text{AREA } A}{\text{AREA PIASTRELLA}}$

$$P(\text{moneta interna}) = \frac{A(\square\, 5\,cm)}{A(\square\, 8\,cm)} = \frac{25}{64} = \frac{n \cdot A(\square\, 5\,cm)}{n \cdot A(\square\, 8\,cm)}$$ $n \to$ numero piastrelle

ES.

Due treni arrivano "a caso" fra le 8.00 e le 8.20. X e Y arrivano indipendentemente l'uno dall'altro.

$E = \{X \text{ arriva prima di } Y\} = \{x<y\}$ $P(E) = ?$ (x,y) → istante di arrivo di Y; ↳ istante di arrivo di X



Singolo treno $P\{t_1 \le x < t_2\} = \dfrac{t_2 - t_1}{20}$

$P\{t_3 < y < t_4\} = \dfrac{t_4 - t_3}{20}$

$$P\{t_1 < x < t_2,\ t_3 < y < t_4\} \overset{\text{indipendenza}}{=} P\{t_1 < x < t_2\} \cdot P\{t_3 < y < t_4\} = \frac{t_2 - t_1}{20} \cdot \frac{t_4 - t_3}{20} = \frac{\overbrace{(t_2 - t_1)(t_4 - t_3)}^{\text{area } t_1 t_2 t_3 t_4}}{\underbrace{400}_{\text{area totale}}} \quad \forall t_1, t_2, t_3, t_4$$

Il tutto vale anche per superfici piccolissime

$\Rightarrow P\{(x,y) \in A\} = \dfrac{\text{AREA}(A)}{400}$ → superficie qualsiasi

area in cui $X < Y$ $\quad P(E) = \dfrac{A(\triangle)}{A(\square)} = \dfrac{1}{2}$ dato che i treni arrivano a caso, è giusto.

Gli estremi hanno lo stesso peso del singolo punto a una dimensione (0)
$\Rightarrow$ la probabilità non cambia.

04/04/08

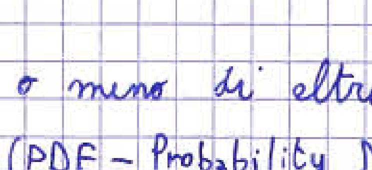
SPAZI CONTINUI NON UNIFORMI

Alcune "zone" pesano più o meno di altre.

Funzione densità di probabilità (PDF – Probability Density Function) → peso in termini probabilistici.

$S = [0, 10]$ definiamo $f(x) \geq 0$ definita $\forall x \in S$ e tale che

$P\{x : a \le x \le b\} \triangleq \int_a^b f(x)\,dx$



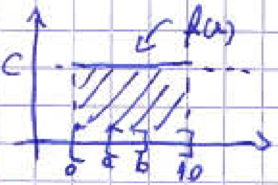
$f(x)$ deve essere 0 fuori da S.

$f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \Rightarrow$ probabilità ≥ 0 (a2)

$P\{x : 0 \le x \le 10\} = 1 = \int_0^{10} f(x)\,dx$ (a1)

Come si può modellare in termini di PDF uno spazio campione continuo uniforme?

↳ estrazione a caso



$$P\{x : a \le x \le b\} = c \cdot (b-a)$$

$$\int_0^{10} c\,dx = 1 \Rightarrow c \cdot \int_0^{10} dx = 1 \Rightarrow c \cdot 10 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{10} \longrightarrow P(x : a \le x \le b) = \frac{b-a}{10}$$

CONDIZIONE DI NORMALIZZAZIONE

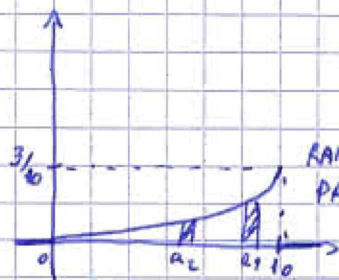
COME VISTO IN PRECE

ESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2 & \text{se } x \in S \\ 0 & \text{se } x \notin S \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \quad \text{IN GENERALE}$$

$$\int_0^{10} C \cdot x^2\,dx = C \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = C \cdot \frac{1000}{3} = 1 \Rightarrow C = \frac{3}{1000}$$



$a_1 \ne a_2 \Rightarrow a_1$ pesa di + cioè è + probabile

$S : \mathbb{R} \quad f(x) \quad x \in S$

Dato un evento $\mathcal{E}$, si ha $\underbrace{P(\mathcal{E})}_{\text{PROBABILITÀ CHE X CADE IN } \mathcal{E}} = \int_{\mathcal{E}} f(x)\,dx$

In alternativa a $f(x)$ si può usare la sua PRIMITIVA

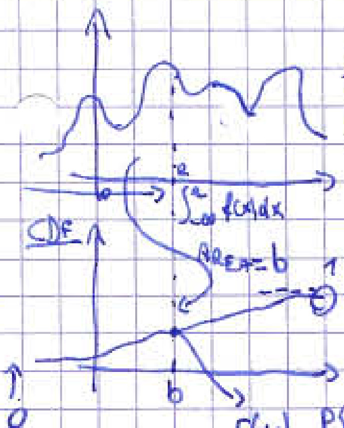
↳ non una

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

↳ variabile muta

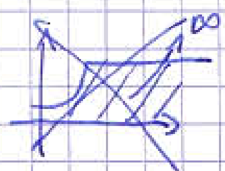
↳ FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CUMULATIVA (CDF - Cumulative Distribution function)

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \qquad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad F(x) = P\{u : -\infty < u \le x\}$$



$f(x) \ge 0$

l'area deve fare 1



PDF: la probabilità è l'ar

CDF: la probabilità è il valore di F(x)

CDF sempre crescente o costante

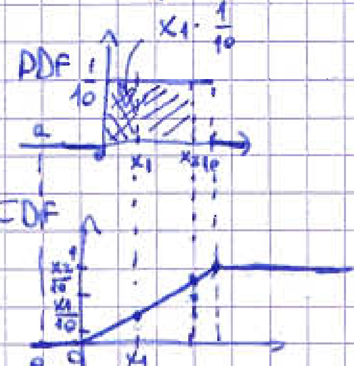
$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1^-$$

$$F(x_1) = P\{u \in S : -\infty < u < b\}$$

ESEMPIO

Estrazione a caso di un punto in $[0, 10]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 \le x \le 10 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \int_0^{x} \frac{1}{10}\,du = \frac{x}{10} & \text{se } 0 < x < 10 \\ 1 & \text{se } x \ge 10 \end{cases}$$



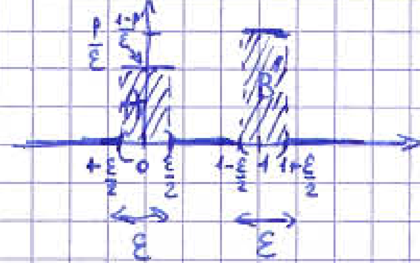
SPAZI DISCRETI VISTI COME CONTINUI

ESP → estrazione di un numero a caso fra 0 e 1

$P\{0\} = p \quad P\{1\} = 1-p$ Pensiamo a questo esperimento come se tutti i punti possibili fossero i reali ($\mathbb{R}$), con una densità di probabilità concentrata solo su 0 e 1.

$$f_\varepsilon(x) \triangleq \begin{cases} \frac{p}{\varepsilon} & -\frac{\varepsilon}{2} < x < \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{1-p}{\varepsilon} & 1-\frac{\varepsilon}{2} < x < 1+\frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

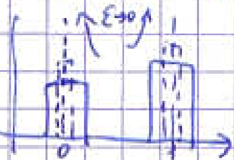
ε → epsilon



$\frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \varepsilon < 1$

$A = \varepsilon \cdot \frac{p}{\varepsilon} = p \qquad B = \varepsilon \cdot \frac{1-p}{\varepsilon} = 1-p$ Vogliamo ε il più piccolo possibile

Riducendo ε



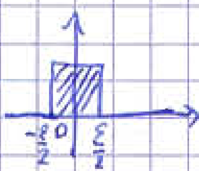
Sarebbe comodo usare per PDF il

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x=0 \text{ o } x=1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

⇒ bisogna introdurre la funzione DELTA DI DIRAC (impulsiva)

Definiamo

$$\underset{(PDF)}{g_\varepsilon(x)} \triangleq \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{se } -\frac{\varepsilon}{2} < x < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

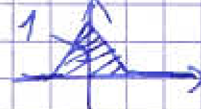


Definiamo la funzione DELTA DI DIRAC come segue

$$\delta(x) \triangleq \lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(x)$$

Matematicamente è una distribuzione perché va a $+\infty$ in un punto (non è una funzione).

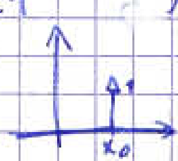
$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0}$ altre funzioni che vanno a $+\infty$ in un punto



PROPRIETÀ

• NORMALIZZAZIONE : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1$ si concentra una massa di probabilità

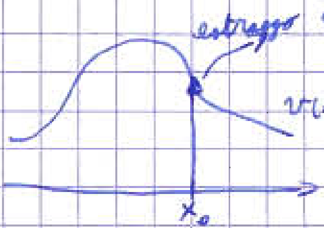
Se si ha $\delta(x-x_0)$ si indica



• SIMMETRIA $\delta(x) = \delta(-x)$

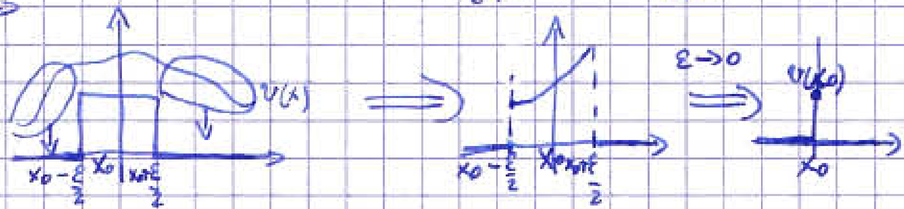
• CAMPIONAMENTO : per ogni funzione $v(x)$ continua in x_0 vale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(x) \cdot \delta(x-x_0)\,dx = v(x_0)$$



Dato che $\delta(x-x_0)$ è nulla fuori da x_0, rimane $v(x_0)$.

$$v(x)\cdot\delta(x-x_0) = v(x)\cdot\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(x-x_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} v(x)\cdot g_\varepsilon(x-x_0) =$$



$$= \lim_{\varepsilon\to 0} v(x_0)\cdot g_\varepsilon(x-x_0) = v(x_0)\cdot\delta(x-x_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x_0)\cdot\delta(x-x_0)\,dx =$$

$$= v(x_0)\cdot\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\,dx}^{1} = v(x_0) \quad \blacksquare$$

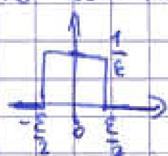
- INTEGRAZIONE: la primitiva della δ è il gradino unitario

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{x}\underbrace{\delta(u)}_{PDF}\,du}_{CDF} = U(x) = \begin{cases} 0 & se\ x<0 \\ 1 & se\ x\geq 0\end{cases}$$

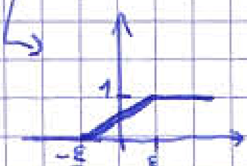
Graficamente è ovvio dalla proprietà di campionamento se considero $v(x)=1$

Consideriamo $g_\varepsilon(x)$, definiamo la sua primitiva come segue:

$$G_\varepsilon(u) = \int_{-\infty}^{x} g_\varepsilon(u)\,du =$$



$$= \begin{cases} 0 & se\ x<-\frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{1}{\varepsilon}x+\frac{1}{2} & se\ -\frac{\varepsilon}{2}\leq x\leq\frac{\varepsilon}{2} \\ 1 & se\ x\geq\frac{\varepsilon}{2}\end{cases}$$



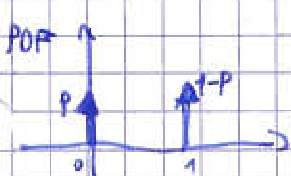
$$\lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(x) = U(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{x} g_\varepsilon(u)\,du = \int_{-\infty}^{x}\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(u)\,du = \int_{-\infty}^{x}\delta(u)\,du$$

$$\frac{d(U(x))}{dx} = \delta(x)$$ anche se $U(x)$ non è continua!

Il problema di partenza era l'estrazione a caso di un numero tra 0 e 1.

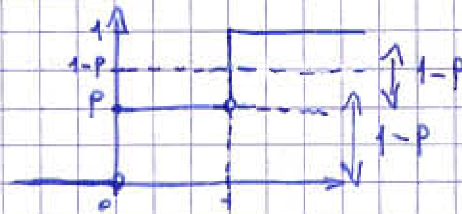
$$f_\varepsilon(x) = p\cdot g_\varepsilon(x) + (1-p)\cdot g_\varepsilon(x-1)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = p\cdot\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(x) + (1-p)\cdot\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(x-1) = p\cdot\delta(x)+(1-p)\cdot\delta(x$$



$$F(x) = p\cdot U(x) + (1-p)\cdot U(x-1)$$

Perché devo sommare i gradini



ESEMPIO

X, Y arrivano a caso in stazione tra le 8.00 e le 8.20 indipendentemente
X → si ferma per 4 minuti
Y → si ferma per 5 minuti

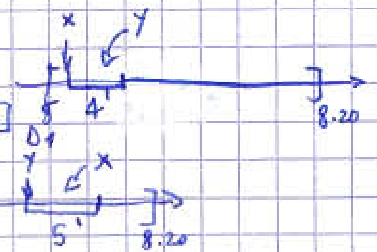
i) P{X e Y si incontrano in stazione}

ii) dato che si sono incontrati, P{X è arrivato prima di Y}

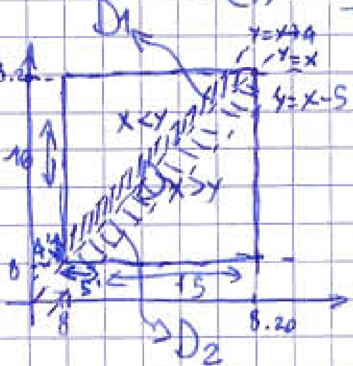
i)

ESP. → (X,Y) coppia di orari di arrivo

2 casi: X arriva prima di Y $X<Y$ $Y \in [X, X+4]$ D_1
Y arriva " di X $Y<X$ $X \in [Y, Y+5]$ D_2



situazioni disgiunte



$D = \{$i 2 treni si incontrano$\} = D_1 \cup D_2$

$$P(D) = \frac{\text{Area}(D)}{\text{Area totale}} = \frac{\text{Area totale} - A(\triangledown) - A(\triangleleft)}{\text{Area totale}} =$$

$$= \frac{20 \cdot 20 - \frac{16 \cdot 16}{2} - \frac{15 \cdot 15}{2}}{20 \cdot 20} = \frac{400 - 128 - \frac{225}{2}}{400} \simeq 0{,}4$$

ii)

$E = \{X$ arriva prima di $Y\} = \{(X,Y) : X<Y\}$

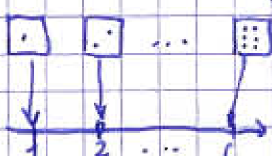
$P(E|D) = ?$ Cioè la parte di sotto la bisettrice, cioè D_2

$$P(E|D) = \frac{P(E \cdot D)}{P(D)} = \frac{P(D_2)}{P(D)} = \frac{\frac{400}{2} - \frac{15 \cdot 15}{2}}{0{,}4} \simeq 0{,}45$$ infatti X si ferma meno.

08/04/2008

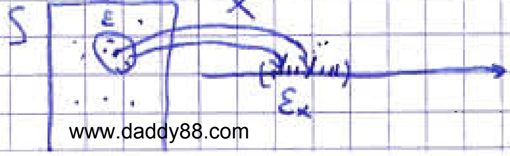
VARIABILI ALEATORIE

Numero reale (in campo fisico). Matematicamente è una funzione $F: S \to \mathbb{R}$



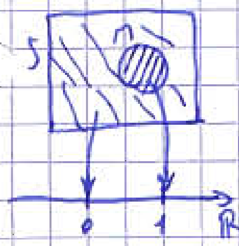
Una variabile aleatoria (VA) X è una funzione $X: S \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni punto $r \in S$ un numero reale $x = X(r)$.
valore, funzione.

Ogni "intervallo" in $\mathbb{R}$ è immagine tramite X di un evento in S.



ESEMPI

Indicatore di un evento M. Definiamo la VA $X(r) = \begin{cases} 1 & \text{se } r \in M \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$



$\mathcal{E}_X : \{x=1\}$ $\qquad \{x=0\}$

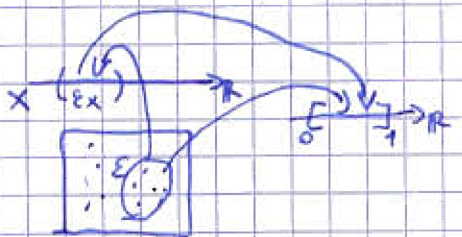
$\mathcal{E} : \{r \in S : X(r) = 1\} = M \qquad \{r \in S : X(r) = 0\} = M^c$

$\{x \le \frac{1}{2}\} \qquad \{r \in S : X(r) \le \frac{1}{2}\} = M^c \dots$ Ogni intervallo in $\mathbb{R}$ è immagine tramite X di S.

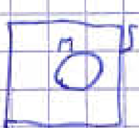
Quindi, una VA induce una funzione probabilità $P_x()$ sull'asse reale.

Per descrivere $P_x()$ si parte dalla seguente definizione:

la CDF della VA X è definita come $\underset{F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}{F_x(x)} \triangleq P_x \underset{\text{evento su } \mathbb{R}}{\{X \le x\}} = P \underset{\text{evento su } S}{\{r \in S : X(r) \le x\}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$



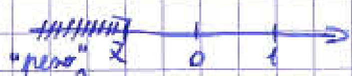
Come calcolo $F_x(x)$ nota $P()$ in S?



sia nota $P(M) \triangleq p$ $\quad P(M^c) \triangleq 1-p \quad$ voglio $F_x(x)$ della VA $X(r) = \begin{cases} 1 & \text{se } r \in M \\ 0 & \text{se } r \in M^c \end{cases}$

Com'è fatto il grafico? Ragiono a zone:

- sia $x < 0$



$F_x(x) = P\{r \in S : X(r) \le x\}$ Dato che $X(r) = 0$ o $X(r) = 1$ e $x < 0$

$\Rightarrow F_x(x) = P\{\emptyset\} = 0.$

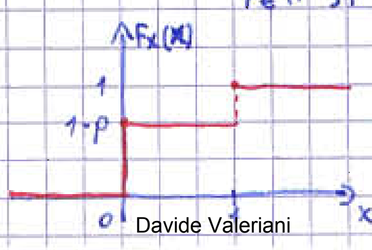
- sia $0 \le x < 1$

$F_x(x) = P\{r \in S : X(r) \le x\}$ $\quad \begin{matrix} r \in M^c & \text{sì} \\ r \in M & \text{no} \end{matrix} \Rightarrow F_x(x) = P(M^c) = 1-p$

- sia $x \ge 1$

$F_x(x) = P\{r \in S : X(r) \le x\}$ $\quad \begin{matrix} r \in M^c & \text{sì} \\ r \in M & \text{sì} \end{matrix} \Rightarrow F_x(x) = P(S) = 1$

Il grafico di F sarà



In pratica, si usa $F_X(x) \triangleq P\{X \le x\}$

PROPRIETÀ DELLA CDF

1) $F_X(+\infty) = 1 \qquad F_X(-\infty) = 0$

DIM.

$F_X(+\infty) = P\{X \le +\infty\} = P(S) = 1 \qquad F_X(-\infty) = P\{X \le -\infty\} = P(\emptyset) = 0$

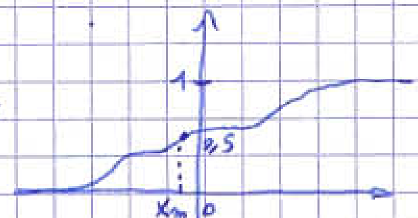
2) $x_2 > x_1 \Rightarrow F_X(x_2) \ge F_X(x_1)$ cioè $F_X(x)$ è non decrescente

DIM.

$\{X \le x_1\}$, $\{x_1 < X \le x_2\}$

$\underbrace{\{X \le x_1\}}_{A} \subset \underbrace{\{X \le x_2\}}_{B} \Rightarrow P(A) \le P(B)$ vale l'uguale quando $P\{x_1 < X \le x_2\} = 0$

Da 1 e 2 capiamo che la CDF sarà di questo tipo



x_m = MEDIANA $= F_X(x) = 0{,}5 \qquad P\{X \le x_m\} = \frac{1}{2}$

↳ è il minore nel caso di $F_X(x)$

3)

a. $P\{X > x\} = 1 - F_X(x)$

b. $\forall x_2 \ge x_1 \Rightarrow P\{x_1 < X \le x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

DIM.

a. $\{X \le x_1\}$ $\{X > x_1\}$ $\mathbb{R}$

$P(S) = P(\{X \le x_1\} \cup \{X > x_1\})$ disgiunti $\qquad 1 = \underbrace{P\{X \le x_1\}}_{\triangleq F_X(x)} + P\{X > x_1\} \qquad P\{X > x_1\} = 1 - F_X(x)$

b. $\{X \le x_1\}$ $\{x_1 < X \le x_2\}$ x_2

$\underbrace{P(\{X \le x_2\})}_{\triangleq F_X(x_2)} = P(\{X \le x_1\} \cup \{x_1 < X \le x_2\}) \overset{(a_3)}{=} \underbrace{P\{X \le x_1\}}_{F_X(x_1)} + P\{x_1 < X \le x_2\} \qquad P\{x_1 < X \le x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

4) $x-\varepsilon$ x $\mathbb{R}$ $\varepsilon \to 0$ x è sempre fuori $\lim_{\varepsilon \to 0}$ x neanche al limite

x $x+\varepsilon$ x è sempre dentro anche al limite. $\lim_{\varepsilon \to 0} \{X \le x - \varepsilon\} = \{X < x\}$

$\lim_{\varepsilon \to 0} \{X \le x + \varepsilon\} = \{X \le x\}$

Dunque $\lim_{\varepsilon \to 0} P\{X \le x - \varepsilon\} = P\{X < x\} \Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} F_X(x-\varepsilon) = F_X(x^-)$ LIMITE SINISTRO

$\lim_{\varepsilon \to 0} P\{X \le x + \varepsilon\} = \underbrace{P\{X \le x\}}_{F_X(x)} \Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} F_X(x+\varepsilon) = F_X(x^+)$ LIMITE DESTRO

$\boxed{F_X(x^-) = P\{X < x\}}$ R_1

$\boxed{F_X(x^+) = F_X(x) = P\{X \le x\}}$ R_2

$P\{X \leq x\} = P\{\{X < x\} \cup \{X = x\}\}$ $\quad F_x(x) = P(X<x) + P(X=x)$ per R_2 e R_1

$$F_x(x^+) = F_x(x^-) + P(X=x)$$

$$\Rightarrow \boxed{F_x(x^+) - F_x(x^-) = P\{X=x\}}$$

Se F è continua in X_0, allora $F(x_0^-) = F(x_0^+) \Rightarrow P\{X=x_0\} = 0$

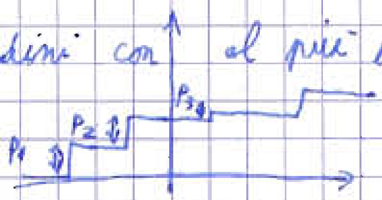
F è continua da destra

Nei punti di discontinuità si concentra la probabilità.

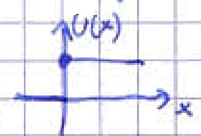
Teorema di Lebesgue

Una qualsiasi CDF $F_x(x)$ si può decomporre nella somma di due funzioni:

$F_x(x) = C(x) + D(x)$ dove $C(x)$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$ e $D(x)$ è una funzione a gradini con al più una infinità numerabile di gradini (al max come in $\mathbb{N}$)



$$D(x) = \sum_i p_i\, U(x - x_i)$$

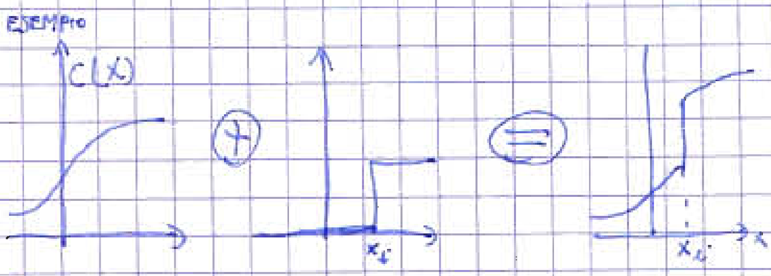


(con $p_i \geq 0$)

Classificazione delle VA

1) Una VA si dice CONTINUA se $D(x) = 0$, cioè se la sua CDF è continua $\forall x \in \mathbb{R}$
2) Una VA si dice DISCRETA se $C(x) = 0$, cioè se la sua CDF è a gradini
3) Altrimenti la VA si dice MISTA.

ESEMPIO



DEF.

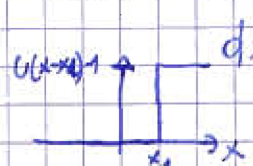
La PDF di una VA X è definita come $f_x(x) = \dfrac{dF_x(x)}{dx}$

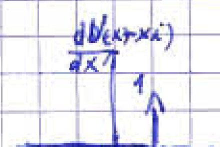
$$f_x(x) = \underbrace{\frac{d}{dx}C(x)}_{c(x)} + \underbrace{\frac{d}{dx}D(x)}_{\sum_i p_i \frac{d}{dx}U(x-x_i)}$$ per il T. (Lebesgue)

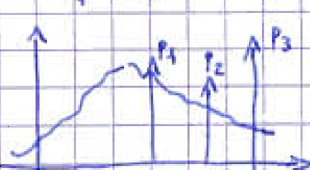
$c(x)$ PARTE REGOLARE

$$= \sum_i p_i\, \delta(x - x_i)$$

$p_i = P\{X = x_i\}$







PROPRIETÀ PDF

1) $f_X(x) \geq 0$ dato che è la derivata di una $F_X(x)$ non decrescente

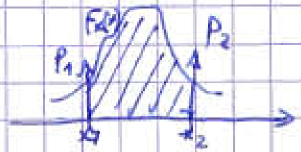
2) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$

DIM. $\int_{x_1}^{x_2} f_X(u)\,du = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{du} F_X(u)\,du = \underbrace{F_X(x_2) - F_X(x_1)}_{P\{x_1 < X \leq x_2\} \text{ PROP. 3b DI CDF}}$ (R) se $x_2 = x$, $x_1 = -\infty$

$\int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = F_X(x) - \underbrace{F_X(-\infty)}_{0} = F_X(x)$

3) PROPRIETÀ DI NORMALIZZAZIONE $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\,du = 1$ DIM. (R) con $x_2 = +\infty$, $x_1 = -\infty$

4)



include x_2 e esclude x_1

P_2 viene incluso nell'$\int$, P_1 no.

$\int_{x_1}^{x_2} f_X(u)\,du = \int_{x_1}^{x_2} C(u)\,du + P_2$ (P_1 no)

5) se x_0 è un punto di continuità della $F_X(x_0)$ allora

$P\{x_0 - \frac{dx}{2} < X < x_0 + \frac{dx}{2}\} \cong \underbrace{f_X(x_0) \cdot dx}_{\text{area del rettangolo}}$ dove $dx > 0$ è "piccolo" a sufficienza.

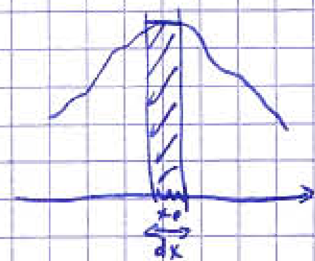
DIM.

se $F_X(x)$ è continua in x_0, allora in x_0 non ci sono δ; se dx è piccolo, non ci sono δ in $]x_0 - \frac{dx}{2}, x_0 + \frac{dx}{2}[$

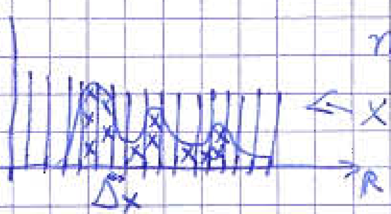
Se escludo δ rimane solo $C(x)$, quindi $P\{x_0 - \frac{dx}{2} \leq X \leq x_0 + \frac{dx}{2}\} \stackrel{(R)}{=} \int_{x_0 - \frac{dx}{2}}^{x_0 + \frac{dx}{2}} f_X(u)\,du$ regolare

Se dx è piccolo, la funzione non varia

$\Rightarrow \cong f_X(x_0) \cdot dx$



MISURA DELLA $f_X(\cdot)$



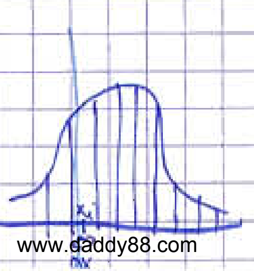
n prove

$\Leftarrow$ X nelle n prove?

11/04/08

MODA $\rightarrow$ ascissa del massimo

5.8) STIMA DELLA PDF



n_i = # punti che cadono in $\left(x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i + \frac{\Delta x}{2}\right)$

$\frac{n_i}{n} \xrightarrow[n \text{ grande}]{} f_X(x_i)\,\Delta x$ $f_X(x_i) \cong \left(\frac{n_i}{n}\right) \frac{1}{\Delta x}$

ESEMPI

$f_X(x) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$ condizioni della PDF $\rightarrow$ infinite funzioni

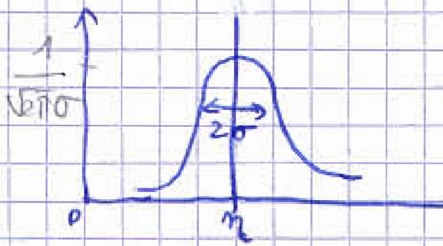
1) $\underline{\text{VA CONTINUE}}$ $f_X(x)$ non ha δ!

- VA GAUSSIANA di parametri η (eta) e $\sigma^2 > 0$

$X \sim N(\eta, \sigma^2)$

normale (+ diffusa negli esperimenti fisici)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$$



$\sigma = \sqrt{\sigma^2} > 0$

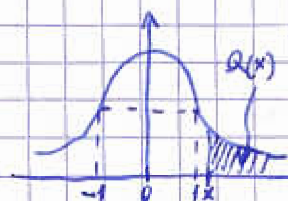
NORMALIZZAZIONE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\eta}{\sigma}\right)^2} dx \qquad y = \frac{x-\eta}{\sigma} \quad dy = \frac{1}{\sigma}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$ da un risultato notevole $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ e ponendo $\alpha = \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{1/2}} = 1 \quad \checkmark$$

$\underline{\text{DEF.}}$ funzione Q gaussiana $Q(x) = \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ $N(0,1)$

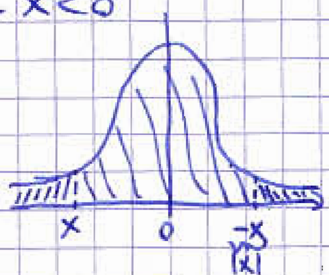


$$Q_e(x) = \frac{1}{\left[-\left(-\sqrt{x^2+b}+x\right)\cdot a + x\right] \cdot \sqrt{2\pi e^{x^2}}}$$

$a = 0{,}344$ $\quad \forall x \geq 0$

$b = 5{,}334$

Se $x < 0$



$Q(x) = 1 - Q(|x|)$

ESEMPI D'USO

$X \sim N(\eta, \sigma^2)$

1) $P\{X > x\} = \int_x^{+\infty} f(u)\,du = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\left(\frac{u-\eta}{\sigma}\right)^2 \frac{1}{2}} du \overset{y=\frac{u-\eta}{\sigma}}{=} \int_{\frac{x-\eta}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = Q\left(\frac{x-\eta}{\sigma}\right)$ [1]

$F_X(x) = P\{X \le x\} = 1 - P\{X > x\} = 1 - Q\left(\frac{x-\eta}{\sigma}\right)$ [2]

$$P(x_1 < X \le x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = 1 - Q\left(\frac{x_2-\eta}{\sigma}\right) - \left(1 - Q\left(\frac{x_1-\eta}{\sigma}\right)\right) = Q\left(\frac{x_1-\eta}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{x_2-\eta}{\sigma}\right) \quad [3]$$

non fa differenza che gli uguali ci siano o no → probabilità di un punto $=0$.

ESEMPIO

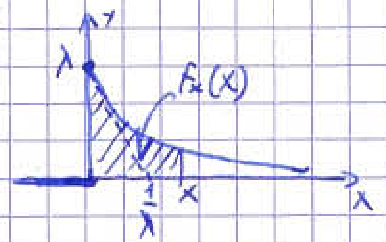
Altezza abitanti a Parma è VA

$X \sim N(\eta = 170\,cm, \sigma = 20\,cm)$ $\quad P\{\underbrace{180\,cm}_{x_1} \le X < \underbrace{190\,cm}_{x_2}\} = ?$

$$P\{180\,cm < x < 190\,cm\} = Q\left(\frac{180-170}{20}\right) - Q\left(\frac{190-170}{20}\right) = Q\left(\frac{1}{2}\right) - Q(1) = 0{,}149 \cong 0{,}15 = 15\%$$

• VA ESPONENZIALE NEGATIVO di parametro $\lambda > 0$

$X \sim exp(\lambda)$ se $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \ge 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$



$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot U(x)$

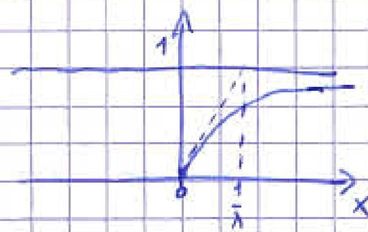
Come calcolo la CDF?

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda u} \cdot U(u)\,du = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \lambda e^{-\lambda u} U(u)\,du}_{0} + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda u} \cdot U(u)\,du =$$

$$= \left[-e^{-\lambda u}\right]_0^x = -e^{-\lambda x} + e^0 = 1 - e^{-\lambda x}$$

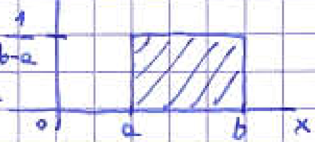
Se $x<0$, l'area sottesa tra $-\infty$ e x è $0 \Rightarrow F_X(x) = 0$

In totale $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x \ge 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = (1 - e^{-\lambda x})U(x)$



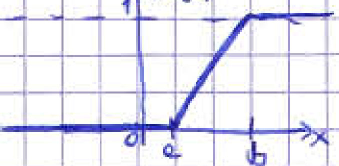
• VA UNIFORME in $[a,b]$ $b>a$

$X \sim Unif[a,b]$ se $f_X(x)$ ha come grafico



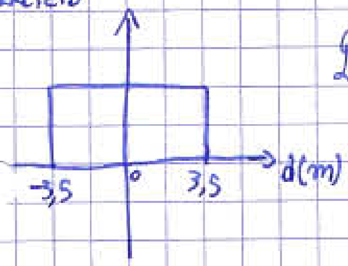
$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a < x < b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

CDF → area sottesa tra $-\infty$ e x della PDF



$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a < x < b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases}$

ESERCIZIO

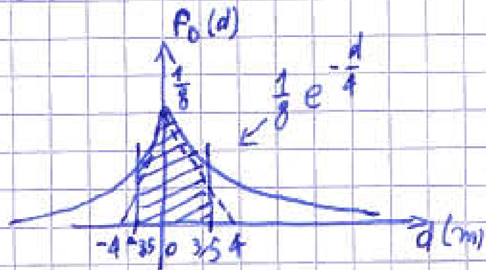


L'attaccante tira a D metri dal centro della porta, dove D è una V.A. con PDF

$$f_D(d) = \frac{1}{8} e^{-\frac{|d|}{4}}$$

Qual è la probabilità che l'attaccante faccia goal?

$P\{goal\} = P\{-3,5 < D < 3,5\}$ $\quad f_D$ è pari $f_D(d) = f_D(-d)$



$$P\{goal\} \underset{\text{per simmetria}}{=} 2\, P\{0 < D < 3,5\} = 2\int_0^{3,5} \frac{1}{8} e^{-\frac{u}{4}} du =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot(-4)\int_0^{3,5} -\frac{1}{4} e^{-\frac{u}{4}} du = -\left[e^{-\frac{u}{4}}\right]_0^{3,5} = -e^{-\frac{3,5}{4}} + e^{-\frac{0}{4}} = 1 - e^{-\frac{3,5}{4}} \cong 0,58 = 58\%$$

2) VA DISCRETE

manca la parte regolare

$$f_X(x) = \sum_i p_i\, \delta(x - x_i)$$

$p_i = P\{X = x_i\} > 0 \quad \{i = 1, 2 \dots\}$ funzione discreta

$P = \{p_1, p_2, p_3 \dots\} \rightarrow$ funzione MASSA DI PROBABILITÀ (PMF): vettore che mi dà i pesi.

La PMF è un vettore di numeri $p_i > 0$ tale che $\sum_i p_i = 1$ COND. NORM.

• VA POISSON di parametro $\lambda > 0$

$X \sim Poisson(\lambda)$ se gli x_i sono gli interi non negativi e i pesi sono

$$p_i = P\{X = i\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \qquad x_i = i = \{0, 1, 2, \dots\}$$

È vero che $\sum_{i=0}^{\infty} p_i$?

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}}_{\text{ESPANSIONE DI TAYLOR DI } e^{\lambda}} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1 \quad \text{VERO}$$

ESEMPIO

$X \sim Poisson(\lambda)$ $\quad P\{X > 1\} = ?$ $\quad P\{X > 1\} = P\{X = 2 \text{ o } X = 3 \dots\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} =$

$$= 1 - e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^0}{0!} - e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^1}{1!} = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda)$$

$P(E) = \sum_{r_i \in E} P\{r_i\}$ VALE SEMPRE

$P(E) = \frac{k}{N}$ SE LO SPAZIO È UNIFORME

• VA BERNOULLI di parametro p $(0<p<1)$

$X \sim \text{Bernoulli}(p)$ se $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ e basta

es: indicatore di un evento

con PMF $\begin{cases} P_0 = 1-p \\ P_1 = p \end{cases}$ ← probabilità di successo

• VA BINOMIALE di parametri N (intero) e p $(0<p<1)$

$X \sim \text{Binom}(N,p)$ se $x_i = 0,1,2,\dots,N$ con peso $p_i = P\{X=i\} = \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i}$ ← PMF

es: S_n, n° successi su n prove con probabilità di successo p

• VA GEOMETRICA di parametro p $(0<p<1)$

$X \sim \text{Geom}(p)$ se $x_i = i = 1,2,3,\dots\infty$ con PMF $p_i = P\{X=i\} = p(1-p)^{i-1}$

es: n° di prove fino al 1° successo

CAPITOLO 6 - FUNZIONI DI VARIABILE ALEATORIA

$Y = g(X)$ Y: funzione di V.A. X dove $g(\cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

X è una funzione $S \to \mathbb{R}$, $x = X(r)$ $\forall r \in S$

$y = \underbrace{g(X(r))}_{y(r)}$ $\forall r \in S$ sto definendo una funzione $Y: S \to \mathbb{R}$

Y è la composizione di g e X, cioè una V.A.

Nota $F_X(x)$, cioè com'è distribuita PMF su X, ricavare $F_Y(y)$. 2 modi!

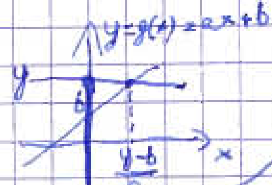
1) METODO DELLA CDF

Si parte da $F_X(x)$ e si arriva a $F_Y(y)$

2) METODO DELLA PDF (teorema fondamentale)

Si parte da $f_X(x)$ e si arriva a $f_Y(y)$

1 ES. $Y = g(X) = aX + b$ con $a>0$



peso da $-\infty$ a y

$F_Y(y) \triangleq P_Y\{Y \le y\} = P\{r \in S : Y(r) \le y\} = P\{r \in S : g(X(r)) \le y\}$ nel nostro problema

abbiamo $\boxed{F_Y(y)} = P\{r \in S : aX_r + b \le y\} = P\left\{r \in S : X(r) \le \frac{y-b}{a}\right\}$ con $a>0$ non cambia il segno della disequazione

$\triangleq \boxed{F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)}$ peso che va da $-\infty$ a $\frac{y-b}{a}$

Metodo grafico: calcolare $F_Y(y) = P\{Y < y\}$ $\quad f_Y(y) = \dfrac{dF_Y(y)}{dy}$

Calcolo della PDF di $Y = g(X)$.

Vari casi:

- X continua (A)
- X discreta (B)
- X mista (C)

(A) caso X continua

TEOREMA FONDAMENTALE: data $Y = g(X)$, X V.A. continua, per determinare la PDF $f_Y(y)$ è sufficiente seguire i seguenti passi:

1. $\forall y$ al di fuori del codominio di $g(\cdot) \Rightarrow f_Y(y) = 0$
2. nel caso in cui $g(\cdot)$ presenti dei tratti costanti, allora $f_Y(y)$ può presentare delle δ. Se $\exists\, \hat{y} : g(x) = \hat{y}$ per $x_0 < x < x_1$, allora

$\{Y = \hat{y}\} = \{x_0 < X < x_1\}$

Se $P\{x_0 < X < x_1\} > 0 \rightarrow f_Y(y)$ è fatta così: $f_Y(y) = P\{x_0 < X < x_1\}\,\delta(y - \hat{y}) + C(y)$

$C(y)$: parte PDF che non contiene δ (se $\hat{y}$ è l'unico tratto costante)

3. $\forall y$ nel codominio non corrispondente a tratti orizzontali di $g(x)$, diciamo $x_1, x_2, \dots, x_n$ le n soluzioni di $y = g(x)$. La PDF di Y in y si scrive:

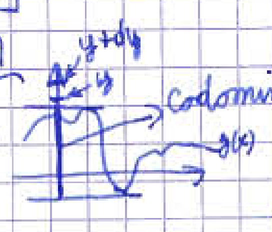
$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} + \dots + \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|}$$

FORMULA FONDAMENTALE PER PASSARE DALLA PDF DI X ALLA PDF DI Y.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ sono funzioni di y

dove $g'(x) \triangleq \dfrac{dg}{dx}$

DIM

1. 

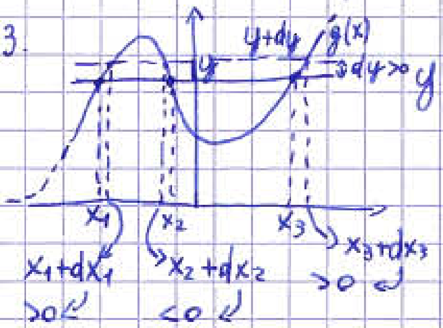
$P\{y < Y < y + dy\} = f_Y(y)\,dy$ perché integrale di intervallo infinitesimo.

$P\{y < Y < y + dy\} = 0$ per costruzione

$\Rightarrow f_Y(y) = 0$

2. ✓

3.



$y=g(x)$ ha 3 soluzioni: x_1, x_2, x_3 $\quad n=3$

$\{y<Y<y+dy\}$ $\quad$ $\{x_1<X<x_1+dx_1\} \cup$ disgiunti
$\{x_2+dx_2<X<x_2\} \cup$
$\{x_3<X<x_3+dx_3\}$

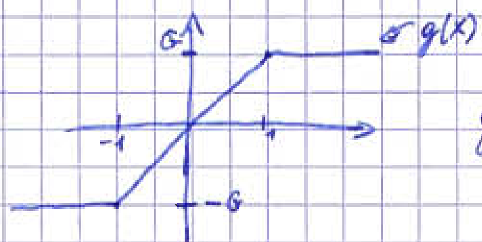
$$P\{y<Y<y+dy\}=P\{x_1<X<x_1+dx_1\}+P\{x_2+dx_2<X<x_2\}+P\{x_3<X<x_3+dx_3\}$$

$$f_Y(y)dy=f_X(x_1)\cdot dx_1+f_X(x_2)\cdot|dx_2|+f_X(x_3)\cdot dx_3 \quad \text{ma } g'(x_1)=\frac{dy}{dx_1}$$

$$f_Y(y)\,dy=f_X(x_1)\cdot\frac{dy}{|g'(x_1)|}+f_X(x_2)\cdot\frac{dy}{|g'(x_2)|}+f_X(x_3)\cdot\frac{dy}{|g'(x_3)|} \qquad f_Y(y)=\frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}+\frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|}+\frac{f_X(x_3)}{|g'(x_3)|}$$

ESEMPIO
AMPLIFICATORE

$Y=g(X)$ $\quad$ X continua

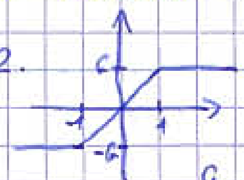


$$g(x)=\begin{cases}-G & \text{se } x\leq -1\\ Gx & \text{se } -1<x\leq 1\\ G & \text{se } x>1\end{cases}$$

$f_Y(y)=?$

1. Codominio $\rightarrow [-G,G]$ $\qquad f_Y(y)=0$ se $y>G$ o $y<-G$

2.



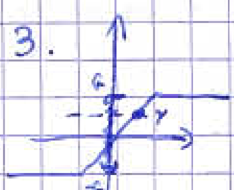
$$P\{Y=G\}=P\{X\geq 1\}\overset{X \text{ continua}}{=}P\{X>1\}=1-P\{X\leq 1\}=1-F_X(1)$$ IPOTESI

Se questa P è >0, allora comparirà δ in G con peso

$P\{Y=-G\}=P\{X\leq -1\}=F_X(-1)>0$ IPOTESI

Se >0, allora comparirà δ

3.



Se $y\in(-G,G)$, allora $y=g(x)=G\cdot x$ presenta un'unica soluzione

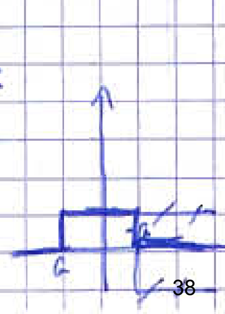
$x_1=\frac{y}{G}$ $\rightarrow$ infatti x_1 è funzione di y

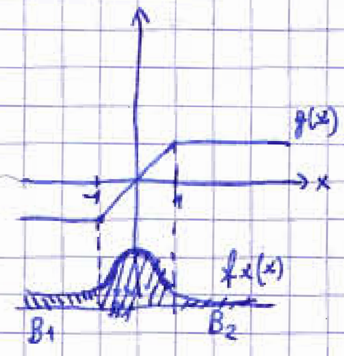
$$f_Y(y)=\frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}=\frac{f_X\left(\frac{y}{G}\right)}{|G|}=\frac{1}{G}\cdot f_X\left(\frac{y}{G}\right) \implies f_Y(y)=[1-F_X(1)]\delta(y-G)+F_X(-1)\delta(y+G)+$$
$$+\,C(y)$$

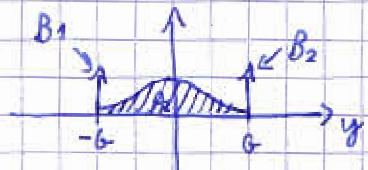
$g'(x_1)=G$ se $x\in(-G,G)$ $\qquad |G|>0$

$$\text{con } C(y)=\begin{cases}\frac{1}{G}f_X\left(\frac{y}{G}\right) & \text{se } -G<y<G\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{G}f_X\left(\frac{y}{G}\right)\cdot[\underbrace{U(y+G)}_{\text{gradino}}-\underbrace{U(y-G)}_{\text{gradino}}]$$





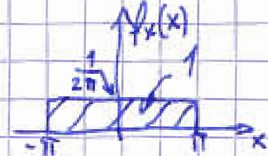


$\frac{1}{G} f_X\left(\frac{y}{G}\right)$ "tira" la campana. Abbiamo concentrato l'area A_1 tra $-G$ e G, ma $A_1 = A_2$

schiaccia la funzione

ESEMPIO 6.6 : DENSITÀ ARCOSENO

$Y = y(X) = a \cdot sen(X + \theta)$ $\begin{cases} a>0 \\ \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$ dati $X \sim Unif\,[-\pi, \pi]$

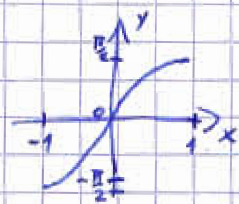


$f_Y(y) = ?$

$sen(z)$

$z = arcsen(y)$ $[-1,1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

T. FOND.



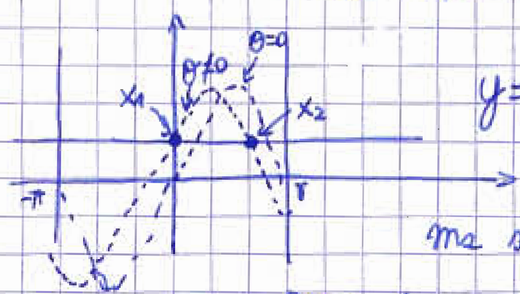
1. Codominio $[-a, a]$

$f_Y(y) = 0$ se $y > a$ o $y < -a$

2. $f_Y(y)$ <u>non</u> presenta δ perché non ci sono zone piatte

3. $g(x) = a\, sen(x + \theta)$

ESPANSIONE (a) TRASLAZIONE (θ)



$y = g(x)$ con $y \in (-a, a)$ ha ∞ soluzioni, ma solo 2 soluzioni hanno PDF di X non nulla!

$\Rightarrow$ considero il periodo

Due casi:

- $y > 0$ $y = a\, sen(x_1 + \theta) \Rightarrow \frac{y}{a} = sen(x_1 + \theta)$ $x_1 + \theta = arcsen\left(\frac{y}{a}\right)$

dato che $y > 0$, $arcsen \frac{y}{a} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e $x_2 + \theta = \pi - (x_1 + \theta) = \pi - arcsen \frac{y}{a}$

$x_1 + \theta = arcsen \frac{y}{a} > 0$ per simmetria

$x_2 + \theta = \pi - arcsen \frac{y}{a} > 0$

- $y < 0$ $x_1 + \theta = arcsen\left(\frac{y}{a}\right) < 0$ e $x_3 + \theta = -\pi - arcsen \frac{y}{a}$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|}$$

$f_X(x_1) \rightarrow \frac{1}{\pi - (-\pi)} = \frac{1}{2\pi}$ perché uniforme

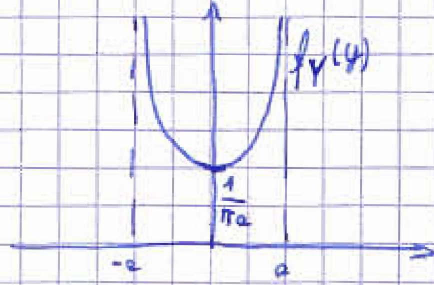
$g'(x) = a\cos(x + \theta) = \pm a\sqrt{1 - sen^2(x + \theta)}$ a seconda dell'angolo

$\text{sen}^2(x+\theta)$, dato che $x_1+\theta = \text{arcsen}\left(\frac{y}{a}\right)$, $= \left(\frac{y}{a}\right)^2$

$g'(x) = \pm a\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}$

$$f_Y(y) = \cancel{2}\cdot\frac{\frac{1}{\cancel{2}\pi}}{a\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}} = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-y^2}}$$ e così nell'altro caso

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-y^2}} & -a<y<a \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$Y = g(X)$ $\quad g(x) = F_X(x)$ continua, non ha zone piatte $\Rightarrow$ monotona crescente $\Rightarrow$ invertibile

Vogliamo calcolare $f_Y(y)$

1. Codominio è $[0,1] \Rightarrow f_Y(y) = 0$ se $y<0$ o $y>1$
2. Per ipotesi $F(x)$ non ha zone piatte $\Rightarrow$ non ci sono δ in $f_Y(y)$
3. $\forall y \in [0,1]$, $y = F_X(x)$ ha 1 sola soluzione $x_1 = F_X^{-1}(y)$.

Quindi $$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{f_X(x_1)}{|f_X(x_1)|} = \frac{\cancel{f_X(x_1)}}{\cancel{f_X(x_1)}} = 1$$

$\frac{d\,CDF}{dx} = PDF$ $\quad |f_X(x_1)| > 0 \rightarrow f_X(x_1) > 0$ la CDF è per H_p crescente

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0<y<1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$ cioè Y è uniformemente distribuito su $[0,1]$ $\forall X$ che rispetta le 2 condizioni date

$y = F_X(x)$ $\quad y \sim Unif[0,1]$

$F_X^{-1}(y) = F_X^{-1}(F_X(x))$ $\quad X = F_X^{-1}(y)$

18/04/08

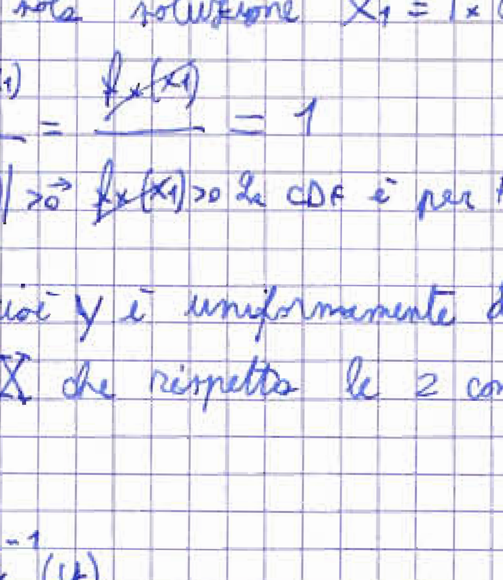
(2) X discreta

$\{x_1, x_2, \dots\}$ infinita numerabile

$P\{X=x_1\}$, $P\{X=x_2\}$ ...

$\downarrow$

$P_X(x_1)$



$\{Y=y_1\} = \{X=x_1\} \cup \{X=x_4\}$ $\qquad P\{Y=y_1\} = P\{X=x_1\} + P\{X=x_4\}$

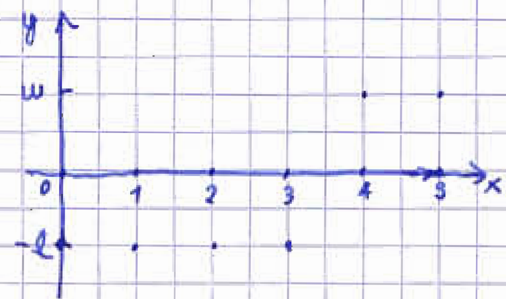
$P\{Y=y_k\} = \sum_{x_j : g(x_j)=y_k} P\{X=x_j\}$ L'insieme di tutte queste è la PMF di Y.

$\Rightarrow$ Dobbiamo vedere come si mappano i punti.

La PDF sarà una somma di δ centrate in y_k con peso $P\{Y=y_k\}$

ESEMPIO

Lancio una moneta 5 volte. Se T almeno 4 volte vinco w€, altrimenti $-l$€.
$Y=\{€ \text{ vinti}\}$. Determinare PMF di Y.



$X=\{n° \text{ teste su 5 lanci}\}=\{0,..,5\}$ $Y=g(x)$ di comodo

$\hookrightarrow P\{X=i\} = \binom{5}{i}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^i\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-i} = \binom{5}{i}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5$

$i=0,\dots,5$

L'insieme di punti corrisponde a una funzione passante per questi punti. Y assume 2 valori: $\{w,-l\}$

$P\{Y=w\}$ e $P\{Y=-l\}=1-P\{Y=w\}$

$$P\{Y=w\}=P\{X=4\}+P\{X=5\}=\binom{5}{4}\cdot\frac{1}{32}+\binom{5}{5}\cdot\frac{1}{32}=\frac{6}{32}=\frac{3}{16}$$

$$P\{Y=-l\}=1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}.$$

(3) X mista

Non c'è regola, bisogna analizzare ogni caso: scorporare la parte discreta da quella continua.

$f_X(x) = c(x)+\sum_i p_i\,\delta(x-x_i)$ $\quad c(x)$ NON contiene δ

ESEMPIO

Tensione V ai morsetti di un diodo $\quad I=\begin{cases}\alpha V^2 & \text{se } V\geq 0\\ -I_0 & \text{se } V<0\end{cases}$

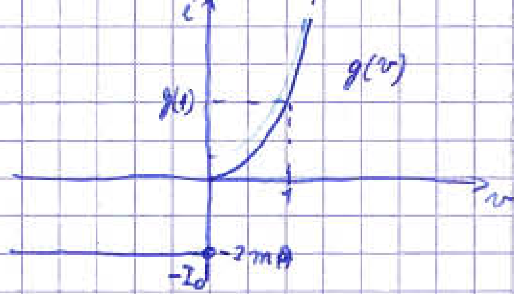
$\alpha = 0{,}5\,\frac{mA}{Volt^2}$ $\quad I_0 = 2\,mA$

Si suppone V abbia la seguente PDF:

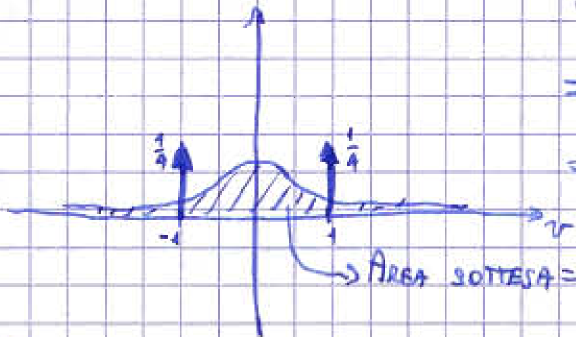
$$f_V(v) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}+\frac{1}{4}\delta(v-1)+\frac{1}{4}\delta(v+1)$$

Trovare la PDF di I e tracciarne il grafico.

$g(x): \quad V \longrightarrow I \qquad i = g(v) = \begin{cases} \alpha v^2 & \text{per } v \geq 0 \\ -I_0 & \text{per } v < 0 \end{cases}$



$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}$ è una V.A. gaussiana di parametri 0 e 1.



La massa di probabilità dei δ è $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ la c(x) deve avere P massima $= \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ ecco il significato di $\frac{1}{2}$ davanti

$\rightarrow$ AREA SOTTESA $= \frac{1}{2}$ PDF di X è simmetrica rispetto a y.

Potrebbe esserci una δ centrata in $-I_0$. $P\{I = -I_0\} = P\{V < 0\} = \frac{1}{2}$

Peso di $\delta = \frac{1}{2}$; centro in $-I_0$

Cosa succede alla PMF concentrata in $\{V > 0\}$?

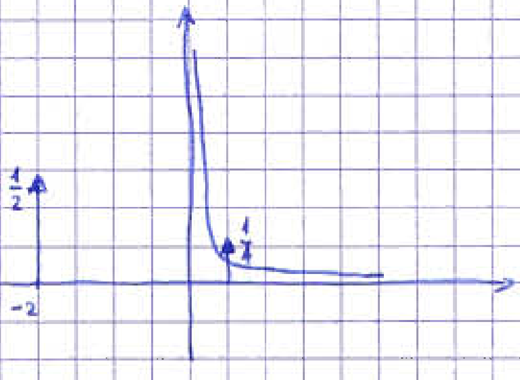
$P\{V = 1\} = \frac{1}{4}$ perché peso di δ. $\quad P\{I = g(1)\} = P\{\underset{\substack{\uparrow \\ \alpha \cdot 1^2 \text{ centro}}}{I = \alpha}\} = \frac{1}{4}$ $\swarrow$ somma delle probabilità di beccare il valore $g(1)$

Trasformiamo $f_V^c(v) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} \cdot u(v)$ tramite $g(v) = \alpha v^2$

Codominio $\Rightarrow i > 0$ $\qquad i = g(v) = \alpha V^2 \qquad V = \pm\sqrt{\frac{i}{\alpha}}$ ma $-\sqrt{\frac{i}{\alpha}}$ non lo considero perché sono nel ramo positivo $\qquad v_1 = \sqrt{\frac{i}{\alpha}}$

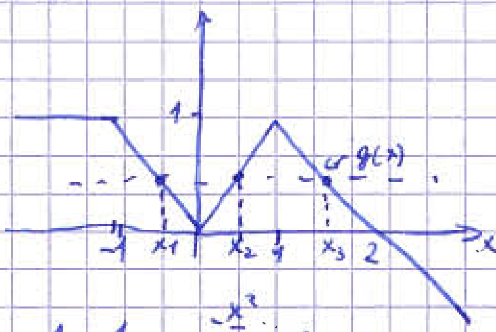
$$f_I^c(i) = \frac{f_V(v_1)}{|g'(v_1)|} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{v_1^2}{2}}}{\underbrace{|2\alpha v_1|}_{> 0}} \overset{v_1 = \sqrt{\frac{i}{\alpha}}}{=} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{i}{2\alpha}}}{2\alpha\sqrt{\frac{i}{\alpha}}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{e^{-\frac{i}{2\alpha}}}{\sqrt{2\pi i \alpha}} u(i)$$

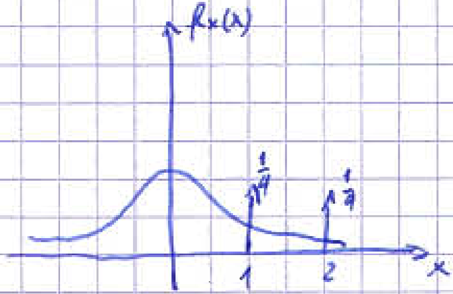
$$\Rightarrow f_I(i) = \frac{1}{4} \frac{e^{-\frac{i}{2\alpha}}}{\sqrt{2\pi i \alpha}} \cdot u(i) + \frac{1}{2}\delta(i + I_0) + \frac{1}{4}\delta(i - \alpha)$$



$\lim_{i \to 0^+} f_I^c(i) = +\infty$

ESERCIZIO





$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}_{f_x^c(x)} + \frac{1}{4}\delta(x-1) + \frac{1}{4}\delta(x-2)$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < -1 \\ -x & \text{se } -1 < x < 0 \\ x & \text{se } 0 < x < 1 \\ -x+2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

1) Trasformo le δ, cioè le masse di probabilità concentrate in 1 e 2

$P\{X=1\} = 1/4 = P\{X=2\}$ $\quad g(1)=1 \quad g(2)=0$

$P\{Y=1\} \geq P\{X=1\} = \frac{1}{4}$

magari ci saranno altre masse di probabilità che andranno a finire in 1

$P\{Y=0\} \geq P\{X=2\} = \frac{1}{4}$

2) Trasformo la parte senza δ, cioè $f_x^c(x)$. Applico il teorema fondamentale, ottenendo una PDF che integri a $\frac{1}{2}$, come $f_x^c(x)$

(a) per $y > 1$, $f_Y^c(y) = 0$

(b) in 1 si concentra anche la probabilità che X sia < -1

$P\{Y=1\} \geq P\{X < -1\} = \frac{1}{2}\left[1 - Q(-1)\right]$ da sommare a $\frac{1}{4}$ di prima

$$P\{Y=1\} = \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{deriva da } \delta} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[1-Q(-1)\right]}_{\text{deriva da } f_x^c(x)}$$

c) due casi

- $0 < y < 1$ 3 soluzioni di $y = g(x)$

$x_1 = -y$ perché $y = -x$

$x_2 = y$

$x_3 = 2-y$ perché $y = -x+2$

$$f_Y^c(y) = \frac{f_x^c(x_1)}{\underbrace{|g'(x_1)|}_{1}} + \frac{f_x^c(x_2)}{\underbrace{|g'(x_2)|}_{1}} + \frac{f_x^c(x_3)}{\underbrace{|g'(x_3)|}_{1}} =$$

$= f_x^c(-y) + f_x^c(y) + f_x^c(2-y)$ con $f_x^c = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ è pari

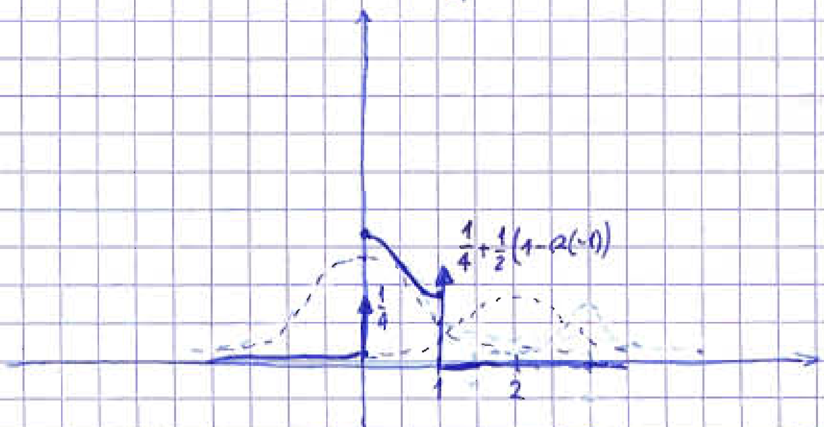
$= 2f_x^c(y) + f_x^c(2-y)$

• $y<0$ $y=g(x)$ ha la sola soluzione $x_3=2-y$

$f_x^c(x)=f_x^c(2-y)$

$$\Rightarrow f_Y^c(y)=\begin{cases}0 & se\ y>1\\ 2f_X^c(y)+f_X^c(2-y) & se\ 0<y\le 1\\ f_X^c(2-y) & se\ y\le 0\end{cases} = \begin{cases} 0 & se\ y>1 \\ 2\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(2-y)^2}{2}} & se\ 0<y\le 1\\ \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(2-y)^2}{2}} & se\ y\le 0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=f_Y^c(y)+\frac{1}{4}\delta(y)+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(1-\alpha(-1))\cdot\delta(y-1)$$



VALORE MEDIO

22/04/08

INTERPRETAZIONE IN FREQUENZA RELATIVA

ESP. → n ripetizioni $\{\zeta_1,\dots,\zeta_n\}$ $\zeta_i\in S$

↳ indice temporale

↳ $X(\zeta)$ sia discreta $=\{x_1,\dots,x_k\}$

↳ indice di insieme

$\{X(\zeta_1),X(\zeta_2),\dots,X(\zeta_n)\}$

Si possono catalogare questi valori, cioè contare quanti di questi sono $x_1,x_2,\dots x_n$. Si arriva quindi a definire un istogramma.

Si definisce MEDIA CAMPIONE (o media aritmetica sul campione)

$$\overline{X}\triangleq\frac{X(\zeta_1)+X(\zeta_2)+\dots+X(\zeta_n)}{n}=\frac{n_1\cdot x_1+n_2\cdot x_2+\dots+n_k x_k}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i\cdot x_i}{N}=\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{N}\cdot x_i$$

Stiamo mediando gli $\{x_i\}$ usando come pesi i coefficienti $\left\{\frac{n_i}{N}\right\}$ frequenza relativa di x_i

media → baricentro delle varie sfere.

ESEMPIO

Esame di N studenti → prove ripetute → ogni studente è un esperimento

Il voto singolo è una V.A. intera tra 0 e 30.

$$\bar{X} = \frac{\sum X(z_i)}{N} = \frac{3 \cdot 28 + 30}{4} \simeq 28{,}5$$ è reale, non è detto che sia un valore assumibile dalla V.A.

Se $N \to +\infty \Rightarrow \lim_{N \to +\infty} \frac{n_i}{N} = P\{X = x_i\}$

$n_i \to +\infty$ possono, altrimenti $P\{X = x_i\} = 0$.

VALOR MEDIO PER VA DISCRETE

DEF.

Sia $X \to \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ una V.A discreta con PMF $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ si definisce valor medio:

$$\underbrace{\mathbb{E}}_{\text{expected}}[X] = \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot x_i$$

ESEMPI

$X = \{\text{faccia di un dado}\}$ $\quad p_i = \frac{1}{6} \ \forall i \qquad \bar{X} = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot i = \frac{1}{6} \cdot \frac{6(6+1)}{2} = 3{,}5$

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$\hookrightarrow 0, 1, 2, \dots$

$$P\{X = i\} = p_i = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \qquad \bar{X} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \cdot i = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \cdot i}_{\text{per } i=0, \text{ il termine vale } 0} = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i(i-1)!} \cdot i =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \underset{i-1=J}{=} \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\boxed{\sum_{J=0}^{\infty} \frac{\lambda^J}{J!}}}_{\to e^{\lambda}} = \lambda \cdot \cancel{e^{-\lambda}} \cdot \cancel{e^{\lambda}} = \lambda$$

ESEMPIO: INDICATORE DI UN EVENTO

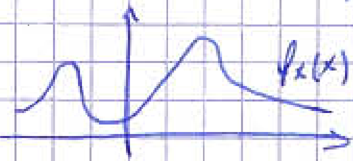
Evento A $\qquad I_A = \begin{cases} 1 & \text{se si verifica } A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \mathbb{E}[I_A] = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(\bar{A}) = P(A)$

DEF. Data una qualunque VA X (discreta, continua o mista) si definisce VALOR MEDIO la seguente quantità:

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \eta_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) \, dx}$$

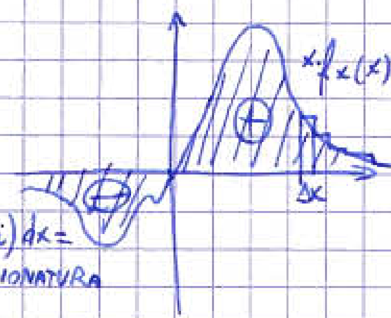
Supponiamo di dividere l'asse reale in tanti intervalli di ampiezza Δx

$$\sum_i x_i \cdot f_X(x_i)\cdot \Delta x \simeq P\{x_i < X \le x_i + \Delta x\}$$



Se X è discreta

$$f_X(x) = \sum p_i\,\delta(x - x_i)$$



$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \sum_i p_i\,\delta(x-x_i)\,dx = \sum_i p_i \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\delta(x-x_i)\,dx}_{\text{CAMPIONATURA}} =$$

$$= \sum_i p_i \cdot x_i .$$

PROPRIETÀ

- Se $f_X(x)$ è simmetrica rispetto a $x=0$ (cioè pari), allora

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\underbrace{x}_{\text{DISPARI}} \cdot \underbrace{f_X(x)}_{\text{PARI}}}_{\text{DISPARI}}\,dx = 0. \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \text{FUNZ. DISPARI} = 0.$$

- Se X è limitata, cioè $P\{a \le X \le b\} = 1$ , allora $a \le \mathbb{E}[X] \le b$

$$\Updownarrow$$
$$f_X(x) = 0 \quad \text{se } x \notin [a,b]$$

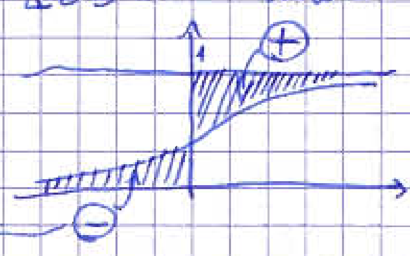
DIM.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_a^b \underbrace{x}_{\le b} \underbrace{f_X(x)}_{\ge 0}\,dx \le \int_a^b b\, f_X(x)\,dx = b \underbrace{\int_a^b f_X(x)\,dx}_{1 \text{ per } H_p} = b \quad \text{e viceversa}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_a^b x f_X(x)\,dx \ge \int_a^b a\, f_X(x)\,dx = a\int_a^b f_X(x)\,dx = a \qquad \blacksquare$$

- Sia X una V.A. con media finita, cioè $\mathbb{E}[X] < +\infty$. Allora

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} [1 - F_X(x)]\,dx - \int_{-\infty}^{0} F_X(x)\,dx$$



se è pari ⊕ e ⊖ sono speculari

VALOR MEDIO DI $Y = g(X)$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\,dy$$

(determinata con metodo grafico o teorema)

TEOREMA DELL'ASPETTAZIONE (TA)

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot f_X(x)\,dx$$

Se X è discreta $\Rightarrow$ Y è discreta

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot f_x(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot \sum_i p_i\,\delta(x-x_i)\,dx = \sum_i p_i \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\delta(x-x_i)\,dx =$$

$$= \sum_i \underset{\substack{\downarrow \\ \text{pesi PMF}}}{p_i}\cdot g(x_i)$$

LINEARITÀ DEL VALOR MEDIO

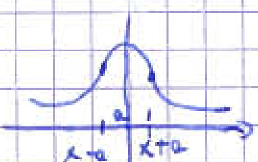
$Y = g(X)$ $\quad Z = h(X)$ $\Rightarrow \forall c,d \in \mathbb{R}$ si ha $\mathbb{E}[c\cdot g(x) + d\cdot h(x)] = c\cdot \mathbb{E}[g(x)] + d\,\mathbb{E}[h$

$\mathbb{E}[c] = c$ con $c \in \mathbb{R}$ si può interpretare come una VA che assume il valore c con probabilità 1.

$f_x(x) = \delta(x-c)$ $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-c)\,dx$ $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\delta(x-c)\,dx = c$

MEDIA DI UNA PDF SIMMETRICA

Se $f_x(x)$ è simmetrica rispetto ad a significa che $f_x(x+a) = f_x(-x+a)$



$$\underline{\mathbb{E}[X] = a}$$

DIM.

$Y = X - a$

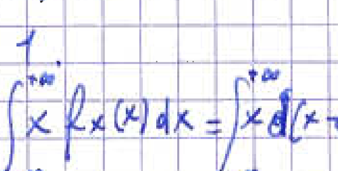
$y = x-a \Rightarrow x = y+a$

$$f_Y(y) = \frac{f_x(y+a)}{1} = \underset{\substack{\text{PARI} \\ \downarrow \\ \mathbb{E}[Y]=0}}{f_x(y+a)}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X-a] = \mathbb{E}[X] - a = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X] = a$.

ESEMPIO

$X \sim \text{Gauss}(\eta, \sigma)$ $\quad f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$



$f_x(\eta+x) = f_x(\eta - x)$ PDF simmetrica rispetto a η $\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \eta$.

VARIANZA

Considero $Y = g(X) = (X - \eta_x)^2$ SCARTO QUADRATICO DI X DAL SUO VALOR MEDIO

DEF. La VARIANZA è il valor medio dello scarto quadratico

$\sigma^2 = \mathbb{E}[(X-\eta_x)^2] = \text{VAR}[X]$

DEF: $\sigma = \sqrt{E[(x-\eta_x)^2]}$ si dice DEVIAZIONE STANDARD

PROPRIETÀ

1. $Y = g(x) = (x-\eta_x)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow E[Y] = Var[X] \geq 0$

2. $E[X^2] = \eta_x^2 + Var[X]$ cioè $Var[X] = \underbrace{E[X^2]}_{\text{VALORE QUADRATICO MEDIO}} - \eta_x^2$

ESEMPI

$X \sim Poisson(\lambda) \quad Var[X] \quad x \to 0,1,2\dots$

$Var[X] = E[X^2] - \eta_x^2$ ma $\eta_x = \lambda$

$$E[X^2] \overset{TA}{=} \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} i^{\cancel{2}} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{\cancel{i}(i-1)!} = \sum_{i=1}^{\infty} (i-1+1)\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} =$$

$g(x_i) = g(i) = i^2 \quad P(X=i)$

$$= e^{-\lambda}\left[\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)\cdot\frac{\lambda^i}{(i-1)!} + \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i \frac{1}{(i-1)!}\right] = e^{-\lambda}\cdot\left[\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\lambda^{i-2}\cdot\lambda^2}{(i-2)!} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^{i-1}\cdot\lambda}{(i-1)!}\right] =$$

se $i=1$ la somma vale 0

$$= e^{-\lambda}\cdot\left[\lambda^2\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!} + \lambda\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\lambda^h}{h!}\right] = e^{-\lambda}\left[\lambda^2\cdot e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}\right] = \lambda^2 + \lambda$$

$Var[X] = \cancel{\lambda^2} + \lambda - \cancel{\lambda^2} = \lambda.$

29/04/08

$X \sim Gauss(\eta, \sigma) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \sqrt{2\pi}\cdot\sigma \xrightarrow{\frac{d}{d\sigma}} \sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-\eta)^2}{2\sigma^2}} \cdot \cancel{2}\,\frac{(x-\eta)^2}{\cancel{2}}\cdot\sigma^{-3}\,dx$$

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-\eta)^2}{2\sigma^2}} (x-\eta)^2 \cdot \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sigma^2}\,dx \qquad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\eta)^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{\frac{-(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}}_{f_x(x)}\,dx$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\eta)^2 f_x(x)\,dx = E[(x-\eta)^2] = Var[X]$$

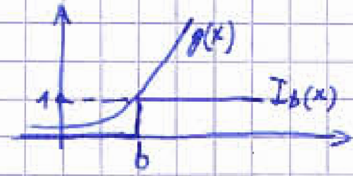
DISEGUAGLIANZE DI MARKOV E CHEBYCHEV

$P\{X \geq b\}$ $\quad b \in \mathbb{R}$

$$I_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \Rightarrow I_b(x) \text{ è un indicatore dell'evento } \{X \geq b\}$$

Consideriamo una generica $g(x)$ tale che $\forall x$ per cui $f_X(x) > 0$ allora

$$\begin{cases} g(x) \geq I_b(x) \\ g(b) = 1 \end{cases} \qquad I_b(x) = u(x-b)$$



$g(x) - I_b(x) \geq 0$ per come è costruita $g(x)$

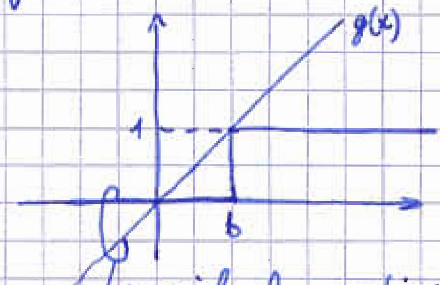
$E[g(x) - I_b(x)] \geq 0 \qquad E[g(x)] - \underbrace{E[I_b(x)]}_{P\{X \geq b\}} \geq 0$

$$\boxed{P\{X \geq b\} \leq E[g(x)]}$$

vale $\forall g$ che rispetta le condizioni date

(1) DIS. DI MARKOV

$g(x) = \dfrac{x}{b}$



↳ viola la condizione

$g(x)$ va bene se $X \geq 0$, cioè X tale che $P\{X < 0\} = 0$

$\forall X \geq 0$

$$P\{X \geq b\} \leq E\left[\frac{X}{b}\right] = \frac{E[X]}{b}$$

esempio:

VA. $\exp(\lambda)$ $\quad P\{X \geq b\} \leq \dfrac{1/\lambda}{b}$

(2) DIS. DI CHEBYCHEV

$Y = (X - \eta_X)^2 \geq 0$ scarto quadratico medio $\qquad P\{Y \geq b\} \leq \dfrac{E[Y]}{b}$ $\quad$ DIS. DI MARKOV SU Y

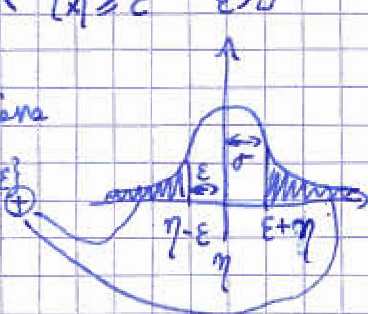
$b = \varepsilon^2$

$P\{(X-\eta_x)^2 \geq \varepsilon^2\} \leq \dfrac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2} \qquad \sqrt{(X-\eta_x)^2} \geq \sqrt{\varepsilon^2} \qquad |X - \eta_x| \geq \varepsilon \quad \varepsilon > 0$

$$\boxed{P\{|X - \eta_x| \geq \varepsilon\} \leq \left(\frac{\sigma_x}{\varepsilon}\right)^2}$$

esempio: gaussiana

$P\{|X-\eta_x| \geq \varepsilon\}$



MOMENTI

Data X il momento di ordine n $\quad m_n \triangleq E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x)\,dx$

FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI

Data X, la sua MGF (moment generating function) è definita

$$\phi_X(s) \triangleq E[e^{sX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} \cdot f_X(x)\,dx \quad \forall s \in \mathbb{C} \text{ t.c. l'integrale converge}$$

Se X è discreta $\quad \phi_X(s) = \sum_i p_X(x_i) e^{s x_i}$

FUNZIONE CARATTERISTICA

L'integrale precedente converge per

. Il dominio di convergenza contiene l'asse immaginario $s = j\omega$

DEF. La funzione caratteristica (CF) di X è definita

$$\Phi_X(\omega) \triangleq E[e^{j\omega X}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} \cdot f_X(t)\,dt$$

TEOREMA DEI MOMENTI

Se $\phi_X(s)$ è derivabile fino all'ordine n allora $E[X^n] = m_n = \phi_X^{(n)}(0) = \left.\frac{d^n}{ds^n}\phi_X(s)\right|_{s=0}$

NOTA

Se $\phi_X(s)$ è derivabile ∞ volte allora $\rightarrow$ sviluppo di Taylor in $s=0$

$$\rightarrow \phi_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_X^{(n)}(0)}{n!} s^n \qquad \phi_X(0) = 1$$

$\rightarrow m_n \rightarrow$ il valor medio $E[X] = m_1$

ESEMPI.

V.A. BERNOULLI $\quad X = \begin{cases} 1 & \text{con prob. } p \\ 0 & \text{con prob. } 1-p \end{cases} \quad \phi_X(s) = E[e^{sX}] = e^{s0} \cdot (1-p) + e^{s \cdot 1} \cdot p =$

$= e^s p + 1 - p. \qquad \phi_X'(s) = pe^s \rightarrow \phi_X'(0) = p = m_1$

$\phi_X''(s) = pe^s \rightarrow \phi_X''(s) = p = m_2 = E[X^2] \qquad Var[X] = m_2 - m_1^2 = p - p^2 = p(1-p)$

V.A. BINOMIALE

$X \sim Bin(n,p) \qquad p_i = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} \qquad \phi_X(s) = \sum_{i=0}^{n} p_i e^{si} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} (e^s)^i =$

$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (pe^s)^i \underbrace{(1-p)}_{b}^{n-i} = (a+b)^n = (pe^s + 1 - p)^n$

V.A. ESPONENZIALE

$$X \sim \exp(\mu) \qquad f_x(x) = \mu e^{-\mu x} \cdot u(x) \qquad \phi_x(s) = \int_0^{+\infty} e^{sx} \mu e^{-\mu x} dx = \int_0^{+\infty} \mu e^{-(\mu-s)x} dx =$$

se $x<0$, $f_x = 0$

$$= \frac{\mu - s}{\mu - s} \int_0^{+\infty} \mu e^{-(\mu-s)x} dx = \frac{\mu}{\mu - s} \int_0^{+\infty} \underbrace{(\mu - s) e^{-(\mu-s)x}}_{\text{"}\exp(\mu-s)\text{"} = 1} dx = \frac{\mu}{\mu - s}$$

$$\phi_x^1(0) = \frac{1}{\mu}$$

V.A. GAUSSIANA

$$X \sim N(\eta, \sigma^2) \qquad \phi_x(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\eta)^2}{2\sigma^2}} e^{st} dt = \qquad \frac{t-\eta}{\sigma} = y \quad \frac{dt}{\sigma} = dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2} + s(\sigma y + \eta)} dy = \text{considero l'esponente}$$

$$-\left[\frac{y^2}{2} - s\sigma y - s\eta\right] = -\frac{1}{2}\left[y^2 - 2s\sigma y - 2s\eta\right] = -\frac{1}{2}\left[y^2 - 2s\sigma y + s^2\sigma^2 - s^2\sigma^2 - 2s\eta\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(y - s\sigma)^2 - s^2\sigma^2 - 2s\eta\right]. \quad \text{Quindi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-s\sigma)^2}}_{N(s\sigma,1)} \cdot e^{\frac{s^2\sigma^2}{2} + s\eta} dy = e^{\frac{s^2\sigma^2}{2}} \cdot e^{s\eta} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} N(s\sigma, 1) dy}_{1} = e^{\frac{s^2\sigma^2}{2}} e^{s\eta}$$

CAPITOLO 8

<u>SOLO 8.2</u>

CDF/PDF condizionate ad eventi

$$P(A|M) = \frac{P(AM)}{P(M)} \qquad P(M) > 0 \qquad A = \{X \leq x\} \qquad P\{X \leq x \mid M\}?$$

$P(\cdot|M)$ è una probabilità

$$P\{X \leq x | M\} \triangleq F_x(x|M) = \frac{P\{X \leq x \cap M\}}{P(M)}$$

$$\{\zeta \in S : X(\zeta) \leq x\} \cap \{\zeta \in S : \zeta \in M\}$$

$$F_x(\infty|M) = 1 \qquad F_x(-\infty|M) = 0$$

$$P\{x_1 < X \leq x_2 | M\} = F_x(x_2|M) - F_x(x_1|M) \qquad f_x(x|M) = \frac{dF_x(x|M)}{dx}$$

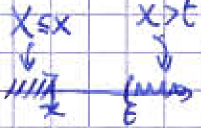
$F_x(x|M)$ è non decrescente e continua da destra

Data una $Y=g(X)$ $\quad f_Y(y|M) = \dfrac{f_X(x_1|M)}{|g'(x_1)|} + \dots$

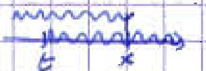
$$E[X|M] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x|M)\,dx$$

ESEMPIO

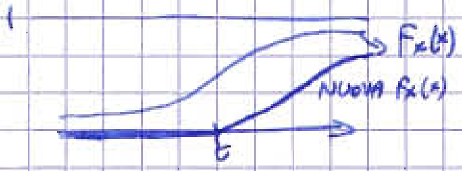
$t \in \mathbb{R} \quad M = \{X > t\} \qquad F_X(x|X>t) = \dfrac{P\{X \le x, X > t\}}{P\{X>t\}}$ $\quad P\{X \le x, X > t\} \rightarrow$ 1) $t > x$ 2) $t < x$ $\quad P\{X>t\} \rightarrow 1 - F_X(t)$

1) 

$\{X \le x\} \cap \{X > t\} = \emptyset \Rightarrow F_X(x|X>t) = 0$

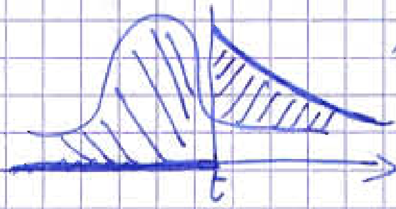
2) 

$P\{t < X \le x\} = F_X(x) - F_X(t) \qquad F_X(x|X>t) = \dfrac{F_X(x) - F_X(t)}{1 - F_X(t)}$



Ha la stessa forma

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < t \\ \dfrac{f_X(x)}{\underbrace{1 - F_X(t)}_{\le 1}} & x \ge t \end{cases}$$ $\Leftarrow$ derivata di $F_X(x)$



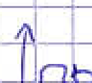
/// = \\\

CAP. 9. 06/05/08

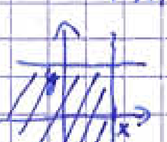
VETTORI ALEATORI

DEF. Dato un esperimento $(S, \mathcal{F}, P)$ un vettore aleatorio $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ è una funzione $S \to \mathbb{R}^n$ tale che $\zeta \in S \to \underline{X}(\zeta) = (X_1(\zeta), \dots, X_n(\zeta))$

COPPIA DI V.A.

$(X,Y) : S \to \mathbb{R}^2$ Ci interessa calcolare $P\{(X,Y) \in D\}$ $\quad D \subset \mathbb{R}^2$ 

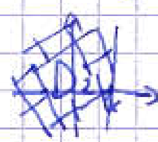
DEF. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, definiamo la funzione di distribuzione cumulativa congiunta (JCDF) di (X,Y) è $F_{XY}(x,y) \triangleq P\{X \le x, Y \le y\} = P\{\zeta \in S : X(\zeta) \le x, Y(\zeta) \le y\} =$
$= P\{(X,Y) \in D_1\}$



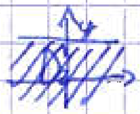
PROPRIETÀ

1) $\{X \le x\} = \{X \le x\} \cap S = \{X \le x\} \cap \{Y \le +\infty\} = \{X \le x, Y \le +\infty\}$

- $P\{X \le x\} = F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty) = P\{(x,y) \in D_2\}$



- $F_Y(y) = F_{XY}(+\infty, y) = P\{(x,y) \in D_2'\}$



- $F_X(+\infty) = 1 = F_{XY}(+\infty, +\infty)$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

- $\{X \le -\infty, Y \le y\} = \emptyset \qquad \{X \le x, Y \le -\infty\} = \emptyset \Rightarrow F_{XY}(-\infty, y) = 0 \quad F_{XY}(x, -\infty) = 0 \quad \forall x, y$

2) fissiamo $y = y_1$; $F_{XY}(x, y_1) = P\{X \le x; Y \le y_1\} = P\{X \le x \mid Y \le y_1\} \cdot P\{Y \le y_1\} =$

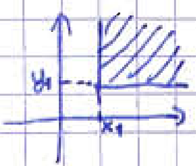
$= F_X(x \mid Y \le y_1) \cdot F_Y(y_1)$ Il profilo rispetto a x è uguale al profilo di:

- non decrescente
- continua da destra

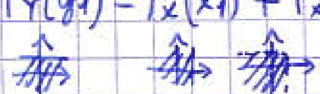
fissando $x = x_1$, $F_{XY}(x_1, y) = F_Y(y \mid X \le x_1) \cdot F_X(x_1)$

ESEMPIO

$P\{X > x_1, Y > y_1\} = P\{(X,Y) \in D\}$



$= 1 - F_Y(y_1) - F_X(x_1) + F_{XY}(x_1, y_1) =$

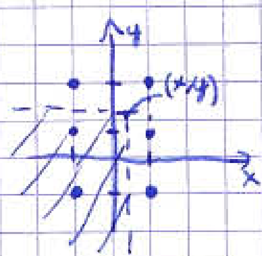


$= 1 - F_{XY}(+\infty, y_1) - F_{XY}(x_1, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1)$

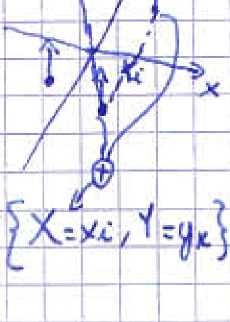
COPPIE DI VA DISCRETE

$X, Y \to \{x_i, i \ge 1\} \to P\{X = x_i\} > 0$

$\{y_k, k \ge 1\} \to P\{Y = y_k\} > 0$



$P\{X = x_i, Y = y_k\} \triangleq p_{XY}(x_i, y_k) = p_{ik}$



$F_{XY}(x,y) = \sum_{\substack{\text{SU TUTTI I PUNTI} \\ (x_i, y_k) \in D}} p_{ik} = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_k \le y} p_{XY}(x_i, y_k)$

$P\{X = x_i\} \overset{\text{PROB. TOT.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = x_i \mid Y = y_k\} \cdot P\{Y = y_k\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = x_i, Y = y_k\} = \sum_k p_{XY}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{FISSO}}}{x_i}, y_k)$

$P\{Y = y_k\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X = x_i, Y = y_k\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{XY}(x_i, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{FISSO}}}{y_k})$

COPPIA DI V.A. CONGIUNTAMENTE CONTINUE

DEF. X e Y sono cong. continue se $\exists$ una funzione propria (senza δ) $f_{XY}(x,y) \geq 0$, definita $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, detta PDF congiunta, se $\forall D$ insieme misurabile di $\mathbb{R}^2$ si ha

$$\boxed{P\{(x,y)\in D\} = \iint_D f_{XY}(x,y)\,dx\,dy}$$

INTEGRALI DOPPI $\rightarrow$ VOLUME SOTTESO

Faccio tante fette $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b;\ c \leq y \leq d\}$

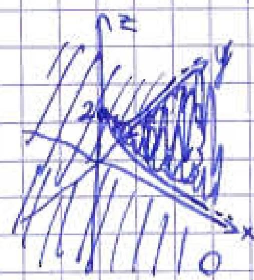
$\text{Area}(y=c) = \int_a^b f_{XY}(x,c)\,dx$ area laterale

$dV(y=c) = \text{Area}(y=c)\,dy$ $\quad \int_c^d dV(y) = \int_c^d \text{Area}(y)\,dy = \int_c^d \Big[\underbrace{\int_a^b f_{XY}(x,y)\,dx}_{\text{FUNZIONE IN Y}}\Big]\,dy$ VOLUME

che è uguale a $\int_a^b \Big[\int_c^d f_{XY}(x,y)\,dy\Big]\,dx$

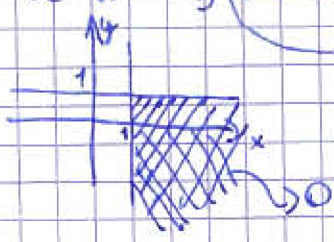
ESEMPIO

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \text{(a) } P\{X>1, Y<1\} \qquad \text{(b) } P\{X<Y\}$$



(a) $P\{(X,Y)\in D_1\}$

A CASA
PDF $\rightarrow$ CDF $\rightarrow$ P

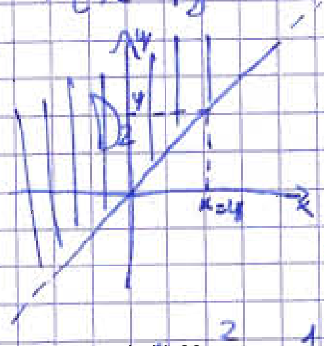


$$= \int_{-\infty}^{1}\int_{1}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_1^{+\infty} 2e^{-x}\cdot e^{-2y}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 2e^{-2y}\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx\,dy = \int_0^1 -2e^{-2y}\Big[e^{-x}\Big]_1^{+\infty} dy =$$

$$= \int_0^1 -2e^{-2y}\cdot\left(-e^{-1}\right)dy = -e^{-1}\cdot\Big[e^{-2y}\Big]_0^1 = -e^{-1}\left(e^{-2}-1\right) = e^{-1}\left(1-e^{-2}\right) < 0 \ \underline{\underline{\text{ok}}}$$

(b) $P\{X<Y\}$



$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \overset{\text{dato come è la PDF}}{=} \int_0^{+\infty}\int_0^{y} 2e^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy = \int_0^{+\infty} 2e^{-2y}\Big[-e^{-x}\Big]_0^y dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} 2e^{-2y}\Big[-e^{-y}+1\Big]dy = \int_0^{+\infty} 2e^{-2y}dy - \int_0^{+\infty} 2e^{-3y}dy = \Big[-e^{-2y}\Big]_0^{+\infty} - \frac{2}{3}\Big[-e^{-3y}\Big]_0^{+\infty} =$$

$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ ragionevole perché ... y si allontana + velocemente

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(u,v)\,du\,dv \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{XY}(x,y)}$$

NORMALIZZAZIONE

$$\boxed{\iint_{\mathbb{R}^2} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1}$$

PDF MARGINALI

$$P\{X \in A\} = P\{X \in A, \underbrace{-\infty < y < +\infty}_{\text{evento certo}}\} = \int_A \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy}_{}\,dx$$

$\hookrightarrow \int_A f_X(x)\,dx$ — valgono $\forall A$ — funzione di x

$$\Rightarrow f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$$

V.A. CONGIUNTAMENTE GAUSSIANE

$(X,Y) \sim N(\eta_x, \eta_Y, \sigma_x^2, \sigma_Y^2, \rho)$ se $f_{XY}(x,y)$ è fatta in questo modo

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\left[\frac{(x-\eta_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(x-\eta_x)(y-\eta_Y)}{\sigma_x\sigma_Y} + \frac{(y-\eta_Y)^2}{\sigma_y^2}\right]}$$

$\hookrightarrow$ se $= \text{cost} \rightarrow$ ellisse

Le curve di livello sono delle ellissi centrate in η_x e η_Y

$\sigma_x > \sigma_y$ usate di solito

$\theta \rightarrow \theta$ ha il segno di ρ

$\rho < 0$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$ Faccio saltar fuori un quadrato da $g(x,y)$

$$\left[\frac{(x-\eta_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(x-\eta_x)(y-\eta_Y)}{\sigma_x\sigma_y} + \rho^2\frac{(y-\eta_Y)^2}{\sigma_y^2} - \rho^2\frac{(y-\eta_Y)^2}{\sigma_y^2} + \frac{(y-\eta_Y)^2}{\sigma_y^2}\right] =$$

$$= \left(\frac{x-\eta_x}{\sigma_x} - \rho\frac{y-\eta_Y}{\sigma_y}\right)^2 + (1-\rho^2)\frac{(y-\eta_Y)^2}{\sigma_y^2}$$ moltiplico per $-\frac{1}{2(1-\rho^2)}$ e carico nell'integrale

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x-\eta_x}{\sigma_x} - \rho\frac{y-\eta_Y}{\sigma_Y}\right)^2} \cdot e^{-\frac{(y-\eta_Y)^2}{2\sigma_y^2}}\,dx =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-\frac{(y-\eta_Y)^2}{2\sigma_Y^2}}}_{\downarrow} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2(1-\rho^2)}} e^{-\frac{1}{2\underbrace{(1-\rho^2)\sigma_x^2}_{\sigma_z^2}}\left[x - \underbrace{\left(\eta_x + \rho\sigma_x\frac{y-\eta_Y}{\sigma_Y}\right)}_{\eta_z}\right]^2} dx =$$

$$= \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\eta_z)^2}{2\sigma_z^2}} dx$$

$\hookrightarrow 1 \quad \forall \eta_z, \sigma_z^2$

9/5/08

VETTORI DI n V.A.

$\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ La JCDF di $\underline{X}$ è $F_{\underline{X}}(\underline{x}) \triangleq P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\}$ $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Nel caso di vettori di V.A. congiuntamente continue allora $\forall D \subset \mathbb{R}^n$ (misurabile)

$$P\{\underline{X} \in D\} = \int \cdots \int_D f_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n)\, dx_1, \dots, dx_n$$

$$f_{\underline{X}}(x) = \frac{\partial^n F_{\underline{X}}(x)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

V.A. CONGIUNTAMENTE DISCRETE $p_{\underline{X}}(\underline{x}) = P\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$

INDIPENDENZA PER V.A.

In passato: due eventi A e B sono indipendenti se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A | B) = P(A)$

DEF. ①

Le VA X e Y sono INDIPENDENTI se $\forall A, B \subset \mathbb{R}$ misurabili si ha

$$P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\} \cdot P\{Y \in B\}$$

se sono indipendenti X e Y

$$P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A | Y \in B\} \cdot P\{Y \in B\}$$

$\Rightarrow P\{X \in A\} = P\{X \in A | Y \in B\}$ se X e Y sono indipendenti.

$$\int_A f_X(x)\, dx \qquad \int_B \int_A f(x,y)\, dx\, dy \qquad \int_B f_Y(y)\, dy$$

DEF. ②

Le V.A. X e Y sono indipendenti se $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\} \cdot P\{Y \leq y\}$ cioè

dove $A =]-\infty, x]$

$B =]-\infty, y]$

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

↳ Quando questa è differenziabile: $f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

Per V.A. discrete, $p_{XY}(x_i, y_k) = p_X(x_i) \cdot p_Y(y_k)$

ESEMPIO

$$f_{XY}(x,y) = e^{-x} \cdot 2e^{-2y}\, u(x)\, u(y) = \underbrace{-e^{-x} u(x)}_{f_X(x)} \cdot \underbrace{\left(-2e^{-2y} u(y)\right)}_{f_Y(y)}$$

$\Rightarrow X$ e Y sono indipendenti.

ESEMPIO

$(X,Y) \sim N(\eta_x, \eta_Y, \sigma^2_X, \sigma^2_Y, \rho)$ Supponiamo $\rho = 0$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\eta_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\eta_y)^2}{\sigma^2_y}\right)} = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$X \sim N(\eta_x, \sigma_x^2)$ $\quad$ $Y \sim N(\eta_Y, \sigma_Y^2)$

NOTA

X, Y sono congiuntamente Gaussiane $\overset{\forall\rho}{\Longrightarrow}$ sono marginalmente Gaussiane; $\not\Longleftarrow$

X, Y sono cong. Gaussiane con $\rho = 0 \Longleftrightarrow X$ e Y sono marg. Gaussiane e indipendenti

TEOREMA

Dati X e Y indipendenti, $g(\cdot)$ e $h(\cdot)$ funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $Z = g(X)$ e $W = h(Y)$

$\Rightarrow Z$ e W sono indipendenti.

ESTENSIONI A n V.A

$\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ è un vettore di V.A. indipendenti se $\forall (A_1, \dots, A_n)$ $A_i \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow P\{X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n\} = P\{X_1 \in A_1\} \cdot \ldots \cdot P\{X_n \in A_n\}$

$F_{\underline{X}}(x) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$ $\qquad$ $f_{\underline{X}}(x) = f_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n)$

CAP. 10

$X \qquad Y$

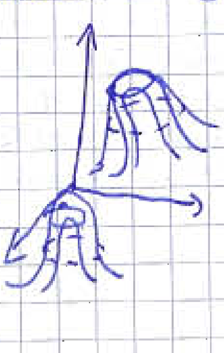
1 V.A. $\longrightarrow$ 1 V.A. < metodo grafico F_Y ; teorema fond. f_Y

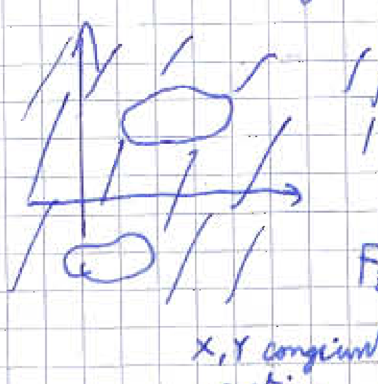
$x, y \qquad z$

2 V.A. $\longrightarrow$ 1 V.A. < F_Z ; f_Z

2 V.A. $\longrightarrow$ 2 V.A.

CALCOLO DELLA PDF DI $Z = g(X,Y)$





D_z

$$D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) \le z\}$$

$$P\{Z \le z\} = P\{(X,Y) \in D_z\}$$

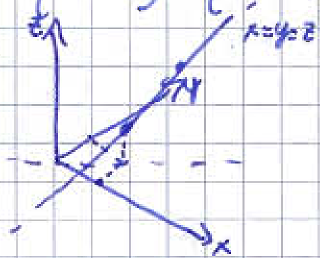
$$F_Z(z) = \iint_{D_z} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

X, Y congiunt. continue

ESEMPIO: max di 2 V.A.

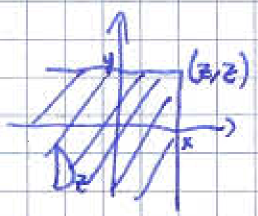
$Z = g(X,Y) = \max\{X,Y\}$ $\qquad \{Z \leq z\} = \{\max(X,Y) \leq z\} = \{X \leq z, Y \leq z\}$

$F_Z(z) = F_{XY}(z,z)$



Sopra la bisettrice, il max è y
sotto, il max è x.

CONTROIMMAGINE



Se X e Y sono indipendenti $F_Z(z) = F_X(z) \cdot F_Y(z)$

$$f_Z(z) = f_X(z) \cdot F_Y(z) + f_Y(z) \cdot F_X(z)$$

INTEGRALE DI CONVOLUZIONE $\quad f_Z(z) = (f_X \otimes f_Y)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) \cdot f_Y(y)\, dy$

Somma di due V.A. indipendenti è una V.A. che ha la PDF data dalla convoluzione delle PDF delle 2 V.A.

CONVOLUZIONE

Date due funzioni $f(t)$ e $g(t)$ si definisce (integrale di) convoluzione

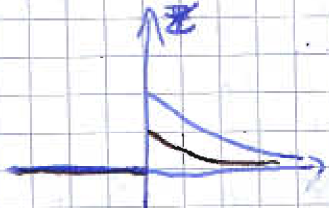
$$c(t) = (f \otimes g)(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u) \cdot g(u)\, du$$

PROBLEMA 10.2

Date 2 V.A. $X \sim exp(1)$, $Y \sim exp(2)$ indipendenti. Trovare la PDF di

$Z = X + Y$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) \cdot f_Y(y)\, dy$$

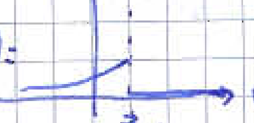


$f_Y(y) = 2e^{-2y}\mathcal{U}(y)$

$f_X(y) = e^{-y}\mathcal{U}(y)$

$f_X(-y)$

$f_X(-y+z) = f_X(-(y-z))$

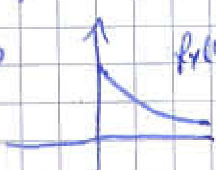


traslazione di z

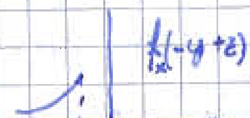
1. RIBALTAMENTO
2. TRASLAZIONE
3. MOLTIPLICAZIONE
4. INTEGRAZIONE

3 e 4 dipendono da z. Considero i vari casi

Se $z \leq 0$

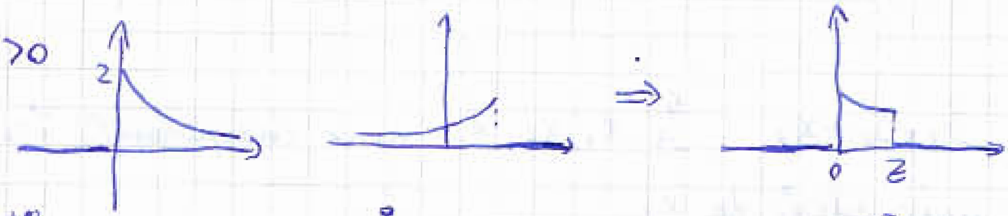


$\cdot$



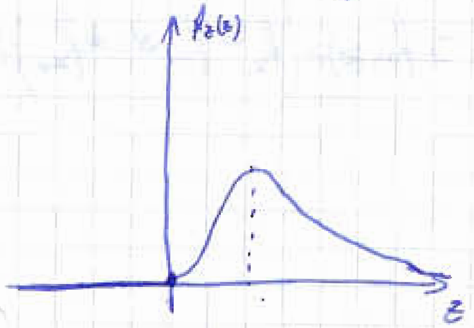
$\Rightarrow$ il prodotto è 0.

$z>0$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\cdot f_Y(y)\,dy = \int_0^z e^{-(z-y)}\cdot 2e^{-2y}\,dy = e^{-z}\cdot\int_0^z 2e^{y}\cdot e^{-2y}\,dy = 2e^{-z}\int_0^z e^{-y}\,dy =$$

$= 2e^{-z}(1-e^{-z})$ Globalmente, la PDF di z $f_z(z) = 2e^{-z}(1-e^{-z})\,u(z)$

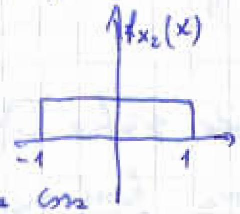


Studio di funzione per trovare il massimo.

ESEMPIO

$S_2 = X_1 + X_2$ $X_1 \sim Unif(-1,1)$ $X_2 \sim Unif(-1,1)$ X_1, X_2 indipendenti

$$f_{S_2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t-x)\, f_{X_2}(x)\,dx$$



$$f_{X_2}(x) = \frac{1}{2}\left(u(x+1) - u(x-1)\right) = f_{X_1}(x)$$

① ribaltando, ottengo la stessa cosa

② traslo

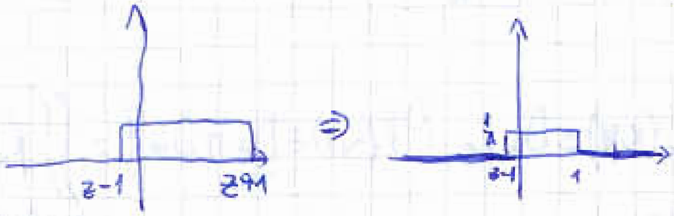
a) $z+1<-1$ cioè $z<-2$

$\Rightarrow f_z(z)=0$

b) $\begin{cases} z+1>-1 \\ z-1<-1 \end{cases}$ cioè $-2<z<0$

$\Rightarrow f_z(z) = \int_{-1}^{z+1} \frac{1}{4}\,dz = \frac{z+2}{4}$

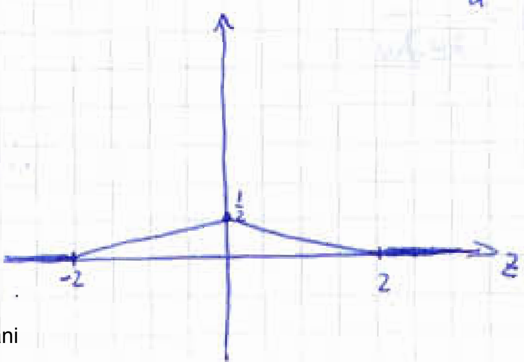
c) $\begin{cases} z+1>1 \\ z-1<1 \end{cases}$ cioè $0<z\leq 2$



$\Rightarrow f_z(z) = \int_{z-1}^{1} \frac{1}{4}\,dz = \frac{2-z}{4}$

d) $z-1>1$ $z>2$ $\Rightarrow f_z(z)=0$

$$f_z(z) = \begin{cases} 0 & \text{per } z<-2 \\ \frac{z+2}{4} & \text{per } -2<z<0 \\ \frac{2-z}{4} & \text{per } 0<z<2 \end{cases}$$



Somma di 3 V.A.

$S_3 = X_1 + X_2 + X_3$ $\quad S_3 = S_2 + X_3$ Se X_1, X_2, X_3 sono indipendenti tra loro $\Rightarrow g(X_1, X_2)$ è indipendente da X_3

Segue che S_2 è indipendente da $X_3 \Rightarrow f_{S_3}(z) = \left(f_{S_2} \otimes f_{X_3}\right)(z) =$

$= \left(f_{X_1} \otimes f_{X_2} \otimes f_{X_3}\right)(z)$

In generale, con $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $\{X_i\}$ tutte indipendenti $\Rightarrow f_{S_n}(z) = \left(f_{X_1} \otimes f_{X_2} \otimes .. \otimes f_{X_n}\right)(z)$

PROPRIETÀ DELLA CONVOLUZIONE

- COMMUTATIVA $\quad f \otimes g = g \otimes f$
- DISTRIBUTIVA $\quad f \otimes (g + h) = f \otimes g + f \otimes h$
- ASSOCIATIVA $\quad f \otimes (g \otimes h) = (f \otimes g) \otimes h$

13/05/2008

TRASFORMAZIONI DI COPPIE DI V.A.

Prima $\quad$ 2 VA $\rightarrow$ 1 VA

Ora $\quad$ 2 V.A. $\rightarrow$ 2 V.A.
- (A) Metodo grafico (JCDF)
- (B) Teorema fondamentale

(A) $\begin{cases} Z = g(X,Y) \\ W = h(X,Y) \end{cases}$ Determinare $F_{ZW}(z,w)$ a partire da $f_{XY}(x,y)$

$g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$F_{ZW}(z,w) = P\{Z \leq z, W \leq w\} = P\{\underbrace{g(X,Y) \leq z}, \underbrace{h(X,Y) \leq w}_{\{(x,y) \in D_w\}}\} =$

D_z = controimmagine di z

D_w = " " w

$\{g(X,Y) \leq z\} = \{(x,y) \in D_z\}$ dipende dalla forma di g

$= P\{(X,Y) \in D_z, (X,Y) \in D_w\} = P\{(X,Y) \in D_z \cap D_w\} = \iint\limits_{D_z \cap D_w = D_{zw}} f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$

$f_{ZW}(z,w) = \dfrac{\partial^2 F_{ZW}}{\partial z \partial w}$

TEOREMA FONDAMENTALE

Considero (X,Y) congiuntamente continue e consideriamo $\begin{cases} Z = g(X,Y) \\ W = h(X,Y) \end{cases}$. Vogliamo determinare $f_{ZW}(z,w)$. Per ogni $\underline{(z,w)}$ si eseguono i seguenti passi:

1) se il sistema

$$\text{DATI}\begin{cases} z = g(x,y) \;\; \text{INCOGNITE} \\ w = h(x,y) \end{cases} \quad \text{non ha soluzioni} \Rightarrow f_{ZW}(z,w) = 0$$

[tratti costanti → δ bidimensionali → non li consideriamo].

2) Se il sistema ammette n soluzioni (x_i, y_i) $i = 1,\dots,n$ allora

$$f_{ZW}(z,w) = \frac{f_{XY}(x_1,y_1)}{|J(x_1,y_1)|} + \dots + \frac{f_{XY}(x_n,y_n)}{|J(x_n,y_n)|} \quad \text{dove } \underset{\text{JACOBIANO}}{J(x,y)} \triangleq \det\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$g(x,y)$ $h(x,y)$

$$J(x,y) = \frac{1}{J(z,w)} \quad \text{JACOBIANO DELLA TRASFORMAZIONE INVERSA} \qquad \begin{cases} z = g(x,y) \\ w = h(x,y) \end{cases} \quad \begin{cases} x = g_1(z,w) \\ y = h_1(z,w) \end{cases}$$

TRASF. BIETTIVA ⇕ 1! soluzione

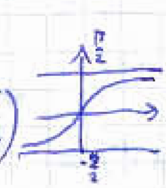
$$f_{ZW}(z,w) = \frac{f_{XY}(x_1,y_1)}{\left|\frac{1}{J(z,w)}\right|} = |J(z,w)| \cdot f_{XY}(x_1,y_1)$$

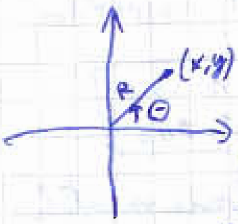
$$J(z,w) = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z} & \frac{\partial g_1}{\partial w} \\ \frac{\partial g_2}{\partial z} & \frac{\partial g_2}{\partial w} \end{bmatrix}$$

ESEMPIO: COORD. CART. → POLARI

X, Y Gaussiane $(\sim N(0,\sigma^2))$ e indipendenti. $R = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\Theta = \arctan^*(x,y) \triangleq \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0 \end{cases} \qquad \arctan\ (-\infty, +\infty) \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$





$R \in [0, \infty)$ $\quad \Theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ $\quad \left\{ r = \sqrt{x^2+y^2},\ \theta = \arctan^*(x,y) \right.$

Il sistema corrisponde a una trasformazione biettiva

$\forall (r,\theta) \in [0,\infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \rightarrow \exists$ soluzione unica $\begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ y_1 = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ $\quad f_{R\Theta}(r,\theta) = \dfrac{f_{XY}(x_1,y_1)}{|J(x_1,y_1)|}$ difficile da calcolare

$$J(x_1,y_1) = \frac{1}{J(z,w)} \qquad \underset{=g_1(r,\theta)}{r\cos\theta}\ \ \underset{=g_2(r,\theta)}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

$$J(z,w) = \det\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta\end{bmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\theta = r$$

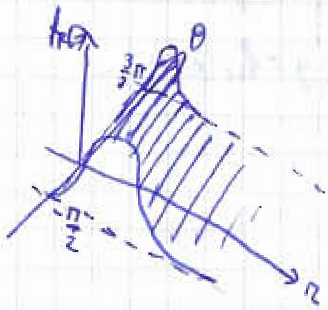
$$J(x_1,y_1) = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow f_{R\Theta}(r,\theta) = f_{XY}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cdot\left|\frac{1}{\frac{1}{r}}\right| = r\,f_{XY}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \underset{\text{indip.}}{=} r\,f_X(r\cos\theta)\cdot f_Y(r\,\mathrm{sen}\,\theta) =$$

$$= r\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{r^2\cos^2\theta}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{r^2\mathrm{sen}^2\theta}{2\sigma^2}} = r\cdot\frac{1}{2\pi\sigma^2}\cdot e^{-\frac{r^2(\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta)}{2\sigma^2}} =$$

$$= \frac{r}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \qquad r\in(0,\infty),\ \theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$$

altrove vale 0.



La PDF di θ sarà uniforme perché $f_{R\Theta}$ non dipende da θ.

$$f_R(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{R\Theta}(r,\theta)\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{r}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}d\theta = \frac{r}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}d\theta =$$

$$\frac{3}{2}\pi-\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$$

$$= \frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\cdot u(r)$$

PDF di Rayleigh

$$f_\Theta(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{R\Theta}(r,\theta)\,dr = \int_0^{+\infty}\frac{r}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\left[-e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\right]_0^{+\infty}}_{=1} = \frac{1}{2\pi}$$

UNIFORME COME CI SI ASPETTAVA

$\boxed{\text{A CASA } \sigma_1\neq\sigma_2}$

2 VA → 1 VA solo con metodo grafico...

Faccio apparire una V.A. ausiliaria per poi applicare il T. fondamentale.

↳ METODO DELLA VARIABILE AUSILIARIA

$$\begin{cases} Z = g(X,Y) & \text{è data} \\ W = X & \text{oppure } W = Y \quad \text{Non esiste una regola fissa}\end{cases}$$

PREMESSA (DA CAP. 8)

Dati: $\to Y$ V.A
$\searrow M$ evento, con $P(M)>0$

$$\begin{cases} F_Y(y|M) \triangleq P\{Y \le y \mid M\} \overset{BAYES}{=} \dfrac{P\{M|Y\le y\}\cdot F_Y(y)}{P(M)} \\ f_Y(y|M) = \dfrac{dF_Y(y|M)}{dy} \end{cases}$$

Supponiamo che Y sia continua $\to P\{Y=y\}=0$ $\quad P\{M|Y=y\}=?$ Non posso applicare BAYES perchè comparirebbe $\uparrow$ al den. $=0$.

$$\boxed{P\{M|Y=y\}} \triangleq \lim_{\varepsilon\to 0^+} P\{M|y-\varepsilon<Y\le y\}$$ che per $\varepsilon \to 0^+$ $\{Y=y\}$ =

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{P\{y-\varepsilon<Y\le y \mid M\}\cdot P(M)}{P\{y-\varepsilon<Y\le y\}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\overbrace{\dfrac{F_Y(y|M)-F_Y(y-\varepsilon|M)}{\varepsilon}}^{\xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} f_Y(y|M)}\cdot P(M)}{\underbrace{\dfrac{F_Y(y)-F_Y(y-\varepsilon)}{\varepsilon}}_{\xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} f_Y(y)}} =$$

se $f_Y(y)\neq 0$
$\Rightarrow P\{y-\varepsilon<Y\le y\}>0$

$$= \boxed{\frac{f_Y(y|M)\cdot P(M)}{f_Y(y)}}$$

$M=\{X\le x\}$ $\Rightarrow F_X(x|Y=y)$ studiamo, anche scrivibile $F_X(x|y)=P\{X\le x \mid Y=y\}$

(A) Y continua, $\forall X$

$$F_X(x|Y=y) = \frac{f_Y(y|X\le x)\cdot \overbrace{F_X(x)}^{P\{X\le x\}}}{f_Y(y)} = \frac{\frac{\partial}{\partial y} F_Y(y|X\le x)\cdot F_X(x)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left[F_Y(y|X\le x)\cdot F_X(x)\right]}{f_Y(y)} =$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial y}\cdot F_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

$\boxed{A.1}$ Y continua, X continua

$$f_X(x|Y=y) = \boxed{f_X(x|y)} = \frac{\partial}{\partial x} F_X(x|Y=y) =$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}F_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \boxed{\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}}$$

$$f_{XY}(x,y) = f_Y(y)\cdot f_X(x|y) = f_Y(y|x)\cdot f_X(x)$$

OSS.

Se X, Y sono indipendenti $\Leftrightarrow f_{XY}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y) \Leftrightarrow f_X(x|y)=f_X(x)$, $f_Y(y|x)=f_Y(y)$

Inoltre, $f_Y(y)\cdot f_X(x|y) = f_Y(y|x)\cdot f_X(x)$, quindi

$$\boxed{f_X(x|y) = \frac{f_Y(y|x)\cdot f_X(x)}{f_Y(y)}}$$

← FORMULA DI BAYES PER PDF DI V.A. CONGIUNTAMENTE CONTINUE.

$$\left.\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x|y)\cdot f_Y(y)\,dy \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y|x)\cdot f_X(x)\,dx \end{aligned}\right\}$$

VERSIONE PER PDF DEL TEOREMA DELLA PROBABILITÀ TOTALE

$f_X(x|y) = \varphi(y)$ data x $\quad \varphi(Y) = f_X(x|Y) \quad E[\varphi(Y)] \overset{T.A.}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\cdot f_Y(y)\,dy =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x|y)\cdot f_Y(y)\,dy = \underline{f_X(x) = E[f_X(x|Y)]}$$

ESEMPIO

$Z = \dfrac{X}{Y}$ $\quad X, Y$ cong. continue $\quad F_Z(z) = P\{Z \le z\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{P\{Z \le z \mid Y=y\}}_{\to P\{\frac{X}{y} \le z \mid Y=y\}} \cdot f_Y(y)\,dy =$ BAYES MISTA

due casi:

se $y>0$ $\quad P\{X \le zy \mid Y=y\} \to F_X(zy|Y=y)$

se $y<0$ $\quad P\{X \ge zy \mid Y=y\} \to 1 - F_X(zy|Y=y)$

$$= \int_{-\infty}^{0} [1 - F_X(zy|Y=y)]\cdot f_Y(y)\,dy + \int_{0}^{+\infty} F_X(zy|Y=y)\cdot f_Y(y)\,dy$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{0} [1 - F_X(zy|Y=y)]\cdot f_Y(y)\,dy + \frac{d}{dz}\int_{0}^{+\infty} F_X(zy|Y=y)\cdot f_Y(y)\,dy = \quad \frac{d}{dz} f_Y(y) = 0.$$

$$= \int_{-\infty}^{0} - \underbrace{f_X(zy|Y=y)}_{\text{derivata}} \cdot y \cdot f_Y(y)\,dy + \int_{0}^{+\infty} f_X(zy|Y=y)\cdot \overset{=|y|}{y} \cdot f_Y(y)\,dy =$$

$-y = |y|$

$$= \int_{-\infty}^{0} |y|\cdot f_X(zy|Y=y)\cdot f_Y(y)\,dy + \int_{0}^{+\infty} |y|\cdot f_X(zy|Y=y)\cdot f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |y|\cdot \underbrace{f_X(zy|Y=y)\cdot f_Y(y)}_{f_{XY}(zy,y)}\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |y|\cdot f_{XY}(zy, y)\,dy$$

A.2 Y continua, X discreta $\quad P\{\underbrace{X = x_i}_{\text{evento } M} \mid Y=y\}$ PMF condizionata $\overset{\text{BAYES MISTA}}{=} \dfrac{f_Y(y|X=x_i)\cdot P\{X=x_i\}}{f_Y(y)}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\cdot P\{X=x_i|Y=y\}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f_Y(y|X=x_i)}_{=1}\cdot P\{X=x_i\}\,dy \qquad P\{X=x_i\} = \int_{-\infty}^{+\infty} P\{X=x_i|Y=y\}\cdot f_Y(y)\,dy$$

TEOREMA PROBABILITÀ TOTALE "MISTA"

$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = \sum_i F_Y(y|X=x_i)\cdot P\{X=x_i\}$ → partizione

$f_Y(y) = \sum_i f_Y(y|X=x_i)\cdot P\{X=x_i\}$

(B) Y discreta, X discreta → PMF congiunta $\quad P\{Y=y_k\} = \sum_i P\{Y=y_k | X=x_i\}\cdot P\{X=x_i\}$

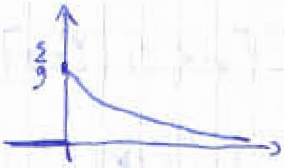
ESERCIZIO

X, N V.A. indipendenti $\quad X \sim exp(1)$ V.A continua $\quad$ N discreta → $\{1,3\}$

Vogliamo la PDF di $W = N \cdot X$ $\qquad P\{N=1\} = \frac{2}{3} \quad P\{N=3\} = \frac{1}{3}$

$$f_W(w) = \underbrace{f_W(w|N=1)}_{f_X(w)}\cdot\underbrace{P(N=1)}_{\frac{1}{3}} + \underbrace{f_W(w|N=3)}_{f_{3X}(w)=\frac{1}{3}f_X(\frac{w}{3})}\cdot\underbrace{P(N=3)}_{\frac{2}{3}} =$$

$$= e^{-w}\,u(w)\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-\frac{w}{3}}\cdot \underset{u(\frac{w}{3})}{\underset{\parallel}{u(w)}}\cdot\frac{2}{3} = u(w)\left[\frac{1}{3}e^{-w} + \frac{2}{9}e^{-\frac{w}{3}}\right]$$



16/05/08

$f_X(x|y)$ si può generalizzare a n V.A.

$x_1,\dots,x_n$ congiuntamente continue $\quad f(x_n, x_{n-1},\dots,x_{k+1}|x_k,\dots,x_1) = \dfrac{f(x_n,x_{n-1},\dots,x_1)}{f(x_k,\dots,x_1)}$

$$F(x_n \dots x_{k+1}|x_k,\dots,x_1) = \int_{\underbrace{R\times R\dots}_{n-k}}\dots\int \dots\, dx_n \dots dx_{k+1}$$

$$f(x_3|x_1,x_2) = \frac{f(x_1,x_2,x_3)}{f(x_1,x_2)} = \frac{f(x_1,x_2|x_3)\cdot f(x_3)}{f(x_1,x_2)}$$

$f(x_1,x_2) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3 \qquad f(x_1|x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1|x_2,x_3)\cdot f(x_2|x_3)\,dx_2$ $\quad$ DOPPIO CONDIZIONAMENTO

VALOR MEDIO DI $Z = g(X,Y)$ $\qquad$ 2 VA → 1 VA

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\cdot f_Z(z)\,dz$$

↳ ottenuta per:
- metodo grafico
- variabile ausiliaria (Th. fondamentale)

Teorema aspettazione:

Data $Z = g(X,Y)$ $\quad E[Z] = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\cdot f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$ $\quad$ per congiuntamente continue

$= \sum_i \sum_k g(x_i,y_k)\cdot p_{XY}(x_i,y_k)$ $\quad$ per V.A. congiuntamente discrete

MEDIE CONDIZIONATE

Dato M con $P(M)>0$, $\mathbb{E}[X|M] \triangleq \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x|M)\,dx & \text{se } x \text{ continua} \\ \sum_i x_i \cdot p_x(x_i|M) & \text{se } x \text{ discreta} \end{cases}$

Nel caso M sia una V.A. Y

- discreta $\mathbb{E}[X|Y=y_k] = \begin{cases} \text{uguale} \\ \text{a} \\ \text{prima con} \\ M=\{Y=y_k\} \end{cases}$

- continua $\underbrace{\mathbb{E}[X|Y=y]}_{\varphi(y)} \triangleq \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x|y)\,dx & x \text{ continua} \\ \sum_i x_i \cdot p_x(x_i|y) & x \text{ discreta} \end{cases}$

Analizziamo $\varphi(Y) = \mathbb{E}[X|Y]$ altra V.A.

$\rightarrow \mathbb{E}[\varphi(Y)] = ?$

$$\mathbb{E}[\varphi(Y)] = \mathbb{E}_Y\left[\mathbb{E}_X[X|Y]\right] \underset{\substack{\text{TEOREMA MEDIA} \\ \text{CONDIZIONATA} \\ \text{(TMC)}}}{=} \mathbb{E}[X] \qquad \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[Y|X]\right] = \mathbb{E}[Y].$$

$\mathbb{E}[g(X,Y)|Y=y] = \hat{\varphi}(y)$

$$\mathbb{E}[\hat{\varphi}(Y)] = \mathbb{E}_Y\left[\mathbb{E}_{XY}[g(X,Y)|Y]\right] = \mathbb{E}[g(X,Y)] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[g(X,Y)|X]\right]$$

ESTENSIONE A M VA

- $\underline{\underline{TA}}$ $Z=g(X_1,\dots,X_n) \rightarrow \mathbb{E}[Z] = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1,\dots,x_n) \cdot f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1,\dots,dx_n$
- $\underline{\underline{TMC}}$ $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[g(X_1,\dots,X_n)|X_1,\dots,X_k]\right] = \mathbb{E}[g(X_1,\dots,X_n)]$

CAP. 12

$f_X(x)$ descritto da $\mathbb{E}[X]$ valor medio e σ^2 varianza.

$f_{XY}(x,y) \rightarrow$ correlazione, covarianza

LINEARITÀ DEL VALOR MEDIO

$Z = g(X,Y) = aX + bY \quad a,b \in \mathbb{R} \qquad \mathbb{E}[aX+bY] = a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y]$

$\mathbb{E}\Big[\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i X_i}_{Z}\Big] = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathbb{E}[X_i]$ GENERALIZZAZIONE

PROPOSIZIONE

Date X,Y, se $X \geq Y \Rightarrow \mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$

PROPOSIZIONE (DISEGUAGLIANZA DI SCHWARTZ)

Date X,Y, allora $\left(\mathbb{E}[X \cdot Y]\right)^2 \leq \mathbb{E}[X^2] \cdot \mathbb{E}[Y^2]$

DEFINIZIONE: $\mathbb{E}[XY]$ si dice CORRELAZIONE di X e Y

X e Y si dicono INCORRELATE se $\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$

PROP.

Se X e Y sono indipendenti, allora sono incorrelate. Il viceversa non è sempre vero.

DIM.

$$\mathbb{E}[XY] \overset{TA}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} xy\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \overset{INDIP.}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} xy\, f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy = \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$$

PROP.

Se $X_1,\dots,X_n$ sono V.A. indipendenti, allora $\mathbb{E}[X_1,\dots,X_n]=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i]$

DEF.

La COVARIANZA fra X e Y è

$$C_{XY}=\mathrm{Cov}[X,Y]\triangleq\mathbb{E}[(X-\eta_X)(Y-\eta_Y)]$$

1 VA		2 VA
val. medio $E[X]$	$\longrightarrow$	correlazione $\mathbb{E}[XY]$
varianza $\sigma_X^2=\mathbb{E}[(X-\eta_X)^2]$	$\rightarrow$	covarianza $\mathbb{E}[(X-\eta_X)(Y-\eta_Y)]$
$\Uparrow$ $f_X(x)$		$\Uparrow$ $f_{XY}(x,y)$

PROP.

$$C_{XY}=\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$$

DEF. (alt)

Due VA sono incorrelate se $C_{XY}=0$

PROPRIETÀ DELLA COVARIANZA

1) $\mathrm{Cov}[X,Y]=\mathrm{Cov}[Y,X]$ PROPRIETÀ DI SIMMETRIA

2) $\mathrm{Cov}[X,X]=\mathrm{Var}[X]$

3) $\mathrm{Cov}[X,a]=0$ $\forall a\in\mathbb{R}$ perché $\mathbb{E}[a]=a \Rightarrow \mathbb{E}[a]-a=0$

4) $\mathrm{Cov}\Big[\underbrace{\sum_{i=1}^{n}a_iX_i}_{Z_1},\underbrace{\sum_{j=1}^{m}b_jY_j}_{Z_2}\Big]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_ib_j\cdot\mathrm{Cov}[X_i,Y_j]$ BILINEARITÀ DELLA COVARIANZA

NOTA

$$\mathrm{Var}[aX]=\mathrm{Cov}[aX,aX]\overset{bilin.}{=}a^2\cdot\mathrm{Cov}[X,X]=a^2\cdot\mathrm{Var}[X]$$

NOTA

$$\mathrm{Cov}[3X+2Y,Z-W]=3\,\mathrm{Cov}[X,Z]-3\,\mathrm{Cov}[X,W]+2\,\mathrm{Cov}[Y,Z]-2\,\mathrm{Cov}[Y,W]$$

5) $\mathrm{Cov}[X+a, Y+b] \underset{a,b \in \mathbb{R}}{\overset{\forall}{=}} \mathrm{Cov}[X,Y]$

6) $\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i] + 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} \mathrm{Cov}[X_i, X_j]$

7) Se n V.A. sono incorrelate fra loro, cioè $\mathrm{Cov}[X_i, X_j] = 0 \quad i \neq j$

$\Downarrow$ dalla 6

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i]$$

20/05/08

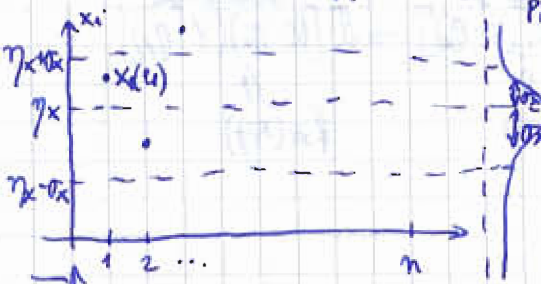
$$\mathrm{Var}[\overline{X}_n] = \frac{\sigma^2_x}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

n esecuzioni di n esperimenti $\eta_1, \ldots, \eta_n$

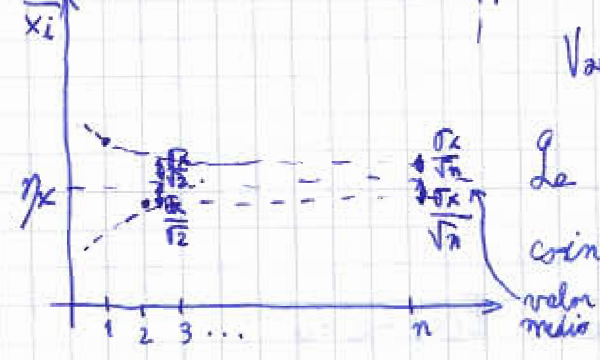
$X_1(\eta_1) \quad X_n(\eta_n)$

$$\overline{X_n}(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i(\eta_i)}{n}$$

medio $\overline{X_1} = \frac{X_1(\eta_1)}{1} \quad \overline{X_2} = \frac{X_1(\eta_1) + X_2(\eta_2)}{2}$



PDF gaussiana (η_x) Molto probabilmente le realizzazioni delle variabili X_i cadranno nella fascia.



$$\mathrm{Var}[\overline{X}_2] = \frac{\sigma_x^2}{2} \quad \sqrt{\mathrm{Var}[\overline{X}_2]} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{2}}$$

La fascia si restringe, arrivando a coincidere con la media all'∞.

DIS. DI CHEBYCHEV

$$P\{|\overline{X}_n - \eta_x| \geq \varepsilon\} \leq \left(\frac{\sigma_{\overline{X}_n}}{\varepsilon}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x/\sqrt{n}}{\varepsilon}\right)^2 = \frac{1}{n}\left(\frac{\sigma_x}{\varepsilon}\right)^2$$

$$\underbrace{P\{|\overline{X}_n - \eta_x| < \varepsilon\}}_{\Downarrow\, n\to\infty \atop 1} = 1 - \bullet \geq 1 - \frac{1}{n}\left(\frac{\sigma_x}{\varepsilon}\right)^2 \xrightarrow{n \to +\infty} 1 \quad \forall \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Prendendo un tubo, $\forall \varepsilon$ quell'evento si verifica sempre nel tubo.

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\bar{X}_n - \eta_x| < \varepsilon\} = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$ LEGGE DEI GRANDI NUMERI (WEAK LAW OF LARGE NUMBERS) → debole

– Punto di contatto tra teoria della probabilità e statistica.

SOMMA STOCASTICA DI V.A.

$Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$ N VA a valori interi $\{X_i\}$ sono incorrelate con la stessa $f_x(x) \to \eta_x, \sigma_x^2$
↳ indipendenti da N

$\mathbb{E}[Z] = \eta_x \cdot \eta_N$ TEOREMA MEDIA CONDIZIONATA $\quad Var[Z] = ?$

FORMULA DELLA VARIANZA CONDIZIONATA (FVC)

Definiamo $Var[X|Y=y] \triangleq E[(X - E[X|Y=y])^2 | Y=y] = \varphi(y)$

È interessante analizzare $\varphi(Y)$ cioè la $Var[X|Y]$

$$\boxed{Var[X] = \mathbb{E}[Var[X|Y]] + Var[\mathbb{E}[X|Y]]} \ \text{FVC}$$

$$Var[Z] = \mathbb{E}[Var[Z|N]] + Var[\mathbb{E}[Z|N]]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\underbrace{Var\Big[\sum_{i=1}^{N} X_i | N\Big]}_{\text{N VA incorrelate}}\Big] + Var\Big[\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{N} X_i | N\Big]\Big] \xrightarrow{\text{linearità}} N \cdot \mathbb{E}[X_i|N] \xrightarrow{\text{indip.}} N \cdot E[X_i]$$

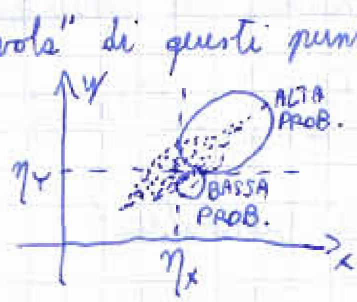
$N \cdot Var[X_i|N]$ ma X_i è indipendente da $N \Rightarrow N \cdot \underbrace{Var[X_i]}_{\sigma_x^2}$

$$= \mathbb{E}[N \cdot Var[X_i]] + Var[N \cdot \underbrace{\mathbb{E}[X_i]}_{\eta_x}] = \sigma_x^2 \cdot \mathbb{E}[N] + \eta_x^2 \cdot Var[N] = \sigma_x^2 \eta_N + \eta_x^2 \sigma_N^2$$

INTERPRETAZIONE DELLA COVARIANZA E CORRELAZIONE

n volte → esperimento ↙ X ↘ Y
↓
$\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_n$
$\begin{pmatrix} X(\zeta_1) \\ Y(\zeta_1) \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} X(\zeta_n) \\ Y(\zeta_n) \end{pmatrix}$ Coordinate in $\mathbb{R}^2$

Se si rappresenta la "nuvola" di questi punti nasce il diagramma di dispersione



$X > \eta_x \xRightarrow{\text{con alta prob.}} y > \eta_Y \qquad X < \eta_x \xRightarrow{\text{con alta prob.}} y < \eta_Y$

$(X - \eta_x)(Y - \eta_Y) > 0$ ← con alta probabilità
↓
$Cov[X,Y] = \mathbb{E}[(X-\eta_x)(Y-\eta_Y)] > 0$ Questo se il diagramma di dispersione ha un'inclinazione positiva

Viceversa se  ...

Per normalizzare la covarianza si definisce il COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE

$$\rho_{XY} \triangleq \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]\,Var[Y]}} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Per la dis. di Schwartz sotto radice $\left|\mathbb{E}[Z_1 \cdot Z_2]\right| \leq \sqrt{\mathbb{E}[Z_1^2] \cdot \mathbb{E}[Z_2^2]}$

$$\Big|\mathbb{E}[\underbrace{(X-\eta_X)}_{Z_1}\underbrace{(Y-\eta_Y)}_{Z_2}]\Big| \leq \sqrt{Var[X]\,Var[Y]} \iff |\rho_{XY}| \leq 1$$ Quand'è che $\rho_{XY} = 1$?

CASO LIMITE

$Y = aX + b \quad a,b \in \mathbb{R} \quad Cov[X,Y] = Cov[X, aX+b] \overset{bilin.}{=} a\,Cov[X,X] + \underbrace{Cov[X,b]}_{=0} =$

$= a\,Var[X] = |a| \cdot segno(a) \cdot \sqrt{Var[X]} \cdot \sqrt{Var[X]} =$

$Var[Y] = a^2 Var[X] \quad \sqrt{Var[Y]} = |a| \cdot \sqrt{Var[X]} \quad = Sgn(a) \cdot \sqrt{Var[X]} \cdot \sqrt{Var[Y]}$

$$\Rightarrow \rho_{XY} = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]\,Var[Y]}} = Sgn(a) = \begin{cases} +1 & \text{se } a>0 \\ -1 & \text{se } a<0 \end{cases}$$

Se X, Y sono linearmente dipendenti $\iff |\rho_{XY}| = 1$

CORRELAZIONE E COVARIANZA DI n VA

Vettore aleatorio $\rightarrow \underset{(n\times 1)}{\underline{X}} = (X_1, \dots, X_n)^T$ vettore colonna $\quad \underset{(n\times 1)}{\underline{X}} \cdot \underset{(1\times n)}{\underline{X}^T} = \begin{bmatrix} X_1X_1 & X_1X_2 & \dots & X_1X_n \\ \vdots & & & \\ X_nX_1 & & & X_nX_n \end{bmatrix}_{n\times n}$

DEF.

La matrice di correlazione è $\underline{\underline{R}}_X \triangleq E[\underline{X}\,\underline{X}^T] = \begin{bmatrix} E[X_1X_1] & \dots & E[X_1X_n] \\ \vdots & & \vdots \\ E[X_nX_1] & \dots & E[X_nX_n] \end{bmatrix}$

$R_{ij} = [\underline{\underline{R}}_X]_{ij} = E[X_i X_j]$ CORRELAZIONE FRA X_i E X_j

$\underline{\underline{R}}_X$ è simmetrica!

$\underline{\underline{C}}_X \triangleq E[(\underline{X}-\eta_X)(X-\eta_X)^T]$ dove $\eta_X = (\eta_{X_1}, \dots, \eta_{X_n})^T \quad C_{ij} = E[(X_i-\eta_{X_i})(X_j-\eta_{X_j})] = Cov[X_i X_j]$

$= \underbrace{E[X_iX_j]}_{R_{ij}} - E[X_i]E[X_j] \Rightarrow \underline{\underline{C}}_X = \underline{\underline{R}}_X - \eta_X \eta_X^T$ matrice di covarianza

simmetrica

NOTA 1 Se $\{X_i\}$ sono incorrelate $\Rightarrow Cov[X_i, X_j]=0 \quad \forall i \neq j \quad \underline{\underline{C}}_X = \begin{bmatrix} Var[X_1] & & \phi \\ & \ddots & \\ \phi & & Var[X_n] \end{bmatrix}$

NOTA 2 Siccome $\left.\begin{matrix} \underline{\underline{R}}_X \text{ è simmetrica} \\ \underline{\underline{C}}_X \text{ è simmetrica} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \det[\underline{\underline{R}}_X] \geq 0 \\ \det[\underline{\underline{C}}_X] \geq 0 \end{matrix}$

$\det[\underline{\underline{R}}_X]=0$ o $\det[\underline{\underline{C}}_X]=0 \iff \{X_i\}$ sono linearmente dipendenti

VETTORI GAUSSIANI

Un vettore $\underline{X}=[X_1, \dots, X_n]^T$ si dice gaussiano $\left(\underline{X} \sim N(\underset{(n\times 1)}{\eta_X}, \underset{(n\times n)}{\underline{\underline{C}}_X})\right)$ se

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\,|\underline{\underline{C}}_X|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\underset{(1\times n)}{(\underline{x}-\eta_X)^T} \cdot \underset{(n\times n)}{\underline{\underline{C}}_X^{-1}} \cdot \underset{(n\times 1)}{(\underline{x}-\eta_X)}\right\}$$

Ottengo un numero all'esponente ; $|\underline{\underline{C}}_X| \triangleq \det(\underline{\underline{C}}_X)$

CAP. 13

FUNZIONI SEPARABILI

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è separabile se $g(\underline{x}) = g_1(x_1) \cdot g_2(x_2) \cdot \ldots \cdot g_n(x_n)$

dove $g_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \forall i=1,\dots,n$

$$\mathbb{E}[\underset{\substack{\downarrow \\ \text{N V.A.} \to 1 \text{ V.A.}}}{g(\underline{X})}] = \mathbb{E}[g_1(X_1) \cdot g_2(X_2) \cdot \ldots \cdot g_n(X_n)] \overset{\text{indip.}}{=} \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[g_i(X_i)]$$

MGF DI SOMME DI V.A. INDIPENDENTI

$X_1, \dots, X_n$ VA indipendenti $\quad Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$$\phi_Z(s) \triangleq \mathbb{E}[e^{zs}] \overset{\text{def. di } Z}{=} \mathbb{E}\left[e^{\sum_{i=1}^n x_i s}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n e^{x_i s}\right] \overset{\text{indip.}}{=} \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[e^{x_i s}\right] = \prod_{i=1}^n \phi_{X_i}(s)$$

MGF/CF - ESTENSIONE A n VA

23/05/08

Considero un vettore aleatorio $\underset{(n\times 1)}{\underline{X}} = [X_1, \dots, X_n]^T$

MGF $\underset{\substack{\downarrow \\ s \in \mathbb{C}^n \\ n\times 1}}{\phi_{\underline{X}}(\underline{s})} \triangleq \mathbb{E}\left[e^{\underset{1\times n}{s^T} \cdot \underset{n\times 1}{\underline{x}}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\sum_{i=1}^n s_i \cdot x_i}\right]$ Definita per tutti i vettori complessi in cui $\mathbb{E}[\cdot]$ converge.

CF $\Phi_{\underline{X}}(\underline{w}) = \mathbb{E}\left(e^{j\underset{\forall w \in \mathbb{R}}{\underline{w}} \cdot \underline{X}^T}\right)$

$$\phi_{\underline{X}}(\underline{s}) = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{s_i x_i}\right] \quad \text{se } \{X_i\} \text{ sono indipendenti} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{s_i x_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} \phi_{x_i}(s_i)$$

VETTORE GAUSSIANO

Se $\underline{X} \sim N(\eta_x, \underline{\underline{C}}_{\underline{x}})$ si dimostra che $\phi_{\underline{x}}(\underline{s}) = e^{\underbrace{\underline{s}^T}_{1\times n} \cdot \underbrace{\eta_x}_{n\times 1} + \frac{1}{2} \underbrace{\underline{s}^T}_{1\times n} \underbrace{\underline{\underline{C}}_{\underline{x}}}_{n\times n} \cdot \underbrace{\underline{s}}_{n\times 1}}$

$\underbrace{\underline{s}^T \cdot \eta_x}_{1\times 1} \rightarrow \sum_{i=1}^{n} s_i \eta_i \qquad C[x_1, x_2] = \rho \sigma_1 \sigma_2$

Se $\underline{n=2}$

$\underline{X} = [x_1, x_2] \qquad \phi_{\underline{x}}(s_1, s_2) = e^{[(s_1\eta_1 + s_2\eta_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 s_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 s_1 s_2 + \sigma_2^2 s_2^2)]}$

$(\sigma_1^2 s_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 s_1 s_2 + \sigma_2^2 s_2^2) \rightarrow [s_1 \; s_2] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$

TEOREMA DEI MOMENTI

Date n VA $X_1, \dots, X_n$,

$$\mathbb{E}\left[X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}\right] = \left.\frac{\partial^{\sum_{i=1}^{n} k_i} \phi_{\underline{x}}(\underline{s})}{\partial s_1^{k_1} \dots \partial s_n^{k_n}}\right|_{s=0}$$

TRASFORMAZIONI LINEARI

$\underline{Y} = \underline{\underline{A}}\,\underline{X} + \underline{b}$ → vettore reale dato $\qquad$ Trovare MGF di Y in funzione di X.

$\underline{Y}, \underline{X} \in \mathbb{R}^n$ vettori stocastici; $\underline{\underline{A}}$ matrice $n \times n$ data

numero costante

$$\phi_{\underline{Y}}(\underline{s}) = \mathbb{E}_{\underline{Y}}\left[e^{\underline{s}^T \underline{Y}}\right] = \mathbb{E}_{\underline{x}}\left[e^{\underline{s}^T(\underline{\underline{A}}\underline{x} + \underline{b})}\right] = \mathbb{E}_{\underline{x}}\left[e^{\underline{s}^T \underline{\underline{A}}\underline{x}} \cdot e^{\underline{s}^T \cdot \underline{b}}\right] = e^{\underline{s}^T \underline{b}} \cdot \mathbb{E}_{\underline{x}}\left[e^{\underline{s}^T \underline{\underline{A}}\underline{x}}\right] =$$

$$= e^{\underline{s}^T \underline{b}} \mathbb{E}\left[e^{(\underline{\underline{A}}^T \underline{s})^T \cdot \underline{x}}\right] = e^{\underline{s}^T \underline{b}} \phi_{\underline{x}}(\underline{\underline{A}}^T \underline{s})$$

$$\phi_{\underline{x}}(\underline{s}') = \mathbb{E}\left[e^{(\underline{s}')^T \cdot \underline{x}}\right]$$

$\underline{s}^T \underline{\underline{A}} = \left[(\underline{s}^T \underline{\underline{A}})^T\right]^T = (\underline{\underline{A}}^T \underline{s})^T$

TRASFORMAZIONI LINEARI DI VETTORI GAUSSIANI

$\underline{Y} = \underline{\underline{A}}\,\underline{X} + \underline{b} \qquad \underline{X} \sim N(\underline{\eta}_x, \underline{\underline{C}}_x) \qquad \phi_{\underline{x}}(\underline{\underline{A}}^T \underline{s}) = e^{(\underline{\underline{A}}^T \underline{s})^T \eta_x + \frac{1}{2}(\underline{\underline{A}}^T \underline{s})^T \underline{\underline{C}}_{\underline{x}} \underline{\underline{A}}^T \underline{s}} =$

$= e^{\underline{s}^T \underline{\underline{A}} \eta_x + \frac{1}{2} \underline{s}^T \underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_x \underline{\underline{A}}^T \underline{s}} \qquad \phi_{\underline{Y}}(\underline{s}) = e^{\underline{s}^T \underbrace{(\underline{b} + \underline{\underline{A}}\eta_x)}_{\eta_Y} + \frac{1}{2} \underline{s}^T \underbrace{\underline{\underline{A}} \underline{\underline{C}}_x \underline{\underline{A}}^T}_{\underline{\underline{C}}_Y} \underline{s}} = e^{\underline{s}^T \eta_Y + \frac{1}{2} \underline{s}^T \underline{\underline{C}}_Y \underline{s}}$

$\Rightarrow Y \sim N(\underline{b} + \underline{\underline{A}}\eta_x, \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}_x \underline{\underline{A}}^T)$

TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

Data la sequenza di V.A. $\{X_1, \dots, X_n\}$ con $\{X_i\}$ IID $\rightarrow E[X_i] = \eta < \infty$ e che $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$, definiamo

$Z_n \triangleq \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \eta)$. Detta $\phi_{Z_n}(s)$ la MGF di Z_n, si ha

$$\lim_{n \to \infty} \phi_{Z_n}(s) = e^{\frac{s^2}{2}} \qquad Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sim N(0,1)$$

OSSERVAZIONI

① $\{X_i\}$ IID $\rightarrow$ si può rilasciare $\begin{pmatrix} i \neq j \\ \eta_i \neq \eta_j \\ \sigma_i \neq \sigma_j \end{pmatrix}$ a patto che nessuna domini sulle altre

Una condizione sufficiente è che esistano $m, M > 0$ tali che

$$\begin{cases} \sigma_i^2 > m & E[|X_i - \eta_i|^2] \text{ schiaccio giù} \\ E[|X_i - \eta_i|^3] < M & \text{vincolo} \end{cases}$$

$\rightarrow$ si può rilasciare: è sufficiente che 2 VA lontane fra loro X_i, X_j con $j \gg i$ siano indipendenti (teorema di Birkhoff)

② $Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \eta) \xrightarrow{n \to \infty} N \sim (0,1)$ Se $n \gg 1$ finito, $Z_n \simeq$ distribuzione come $N(0,1)$

$$Z_n = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}\,\eta}{\sigma\sqrt{n}} \qquad Z_n \sigma\sqrt{n} = \sum_{i=1}^{n} X_i - n\eta \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i}_{S_n} = Z_n \underbrace{\sigma\sqrt{n}}_{a} + \underbrace{n\eta}_{b}$$

$S_n = a Z_n + b$ Una trasformazione lineare gaussiana $\sim N$

$$\Rightarrow S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} N(n\eta, n\sigma^2)$$

TLC PER VA DISCRETE

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \{X_i\}$ IID $\quad \eta_s \triangleq \sum_{i=1}^{n} \eta_i \quad \sigma_s^2 \triangleq \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \quad g_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_s^2}} e^{-\frac{(x-\eta_s)^2}{2\sigma_s^2}}$ n $\downarrow$ finito

dipendono da n

• V.A. continue

$S_n \to f_S(x)$ dipendente da n. Per n finito e $n \gg 1$, si ha

$f_S(x) \simeq g_S(x)$ approssimazione che diventa un'uguaglianza per $n \to \infty$

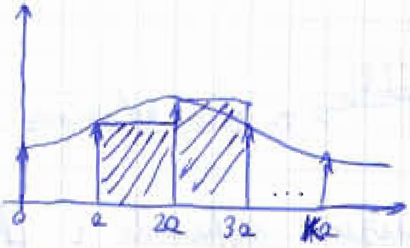
• VA discrete

S_n è discreta. Per un valore finito di n, $f_S(x) = \sum_i \delta(x - x_i)$ allora $f_S(x) \not\simeq g_S(x)$.

<u>Però</u> se le VA sono <u>a reticolo</u> (possono assumere valori in punti multipli di un dato valore a chiamato passo del reticolo $\{0, a, 2a, \dots\}$), allora

$$\lim_{n\to\infty} P\{S_n = ka\} = a \cdot g_S(ka)$$

S_n assume valori sul reticolo.



TEOREMA DI DE MOIVRE-LAPLACE (TDL)

n prove. Nell'i-esimo sottoesperimento $\to X_i = \{$successo nella i-ma prova$\}$

$X_i \sim$ Bernoulli(p) $\quad \eta_i = p \quad \sigma_i^2 = p(1-p)$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ è il numero di successi su n prove $\sim Bin(n,p)$

$\eta_S = \mathbb{E}[S_n] = np \quad \sigma_S^2 = np(1-p)$ $\quad S_n$ è una VA discreta a reticolo con $a=1$

$$\Rightarrow \underset{k=0,1,\dots,n}{P\{S_n = k\}} = \underbrace{\binom{n}{k} p^k (1-p)^k}_{\text{esatto}} \underset{(n\gg 1)}{\underset{(TLC)}{\simeq}} a \cdot g_S(ka) = g_S(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}} \quad \text{DML}$$

Questa approssimazione vale benissimo quando $n \to \infty$; per $n \gg 1$ e finito, se $np(1-p) \gg 1$ e $|k - np| < \sqrt{np(1-p)}$ ← valori di k vicino alla media

$\Rightarrow$ l'approssimazione di DML è buona

Se $np(1-p) \leq 1$, l'approssimazione di Poisson è migliore (eventi rari)

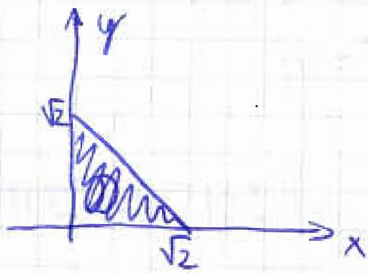
$\hookrightarrow p \ll 1$

$$P\{S_n = k\} \simeq e^{-np} \cdot \frac{(np)^k}{k!} \xrightarrow[np\to\infty]{n\to\infty} \text{gaussiana}$$

```tikzcd
\text{BINOMIALE} \arrow[r, "\text{eventi rari}"] \arrow[dr, "TLC"'] & \text{POISSON} \arrow[d, leftrightarrow, "(?)"] \\
& \text{GAUSSIANA}
```

2° COMPITINO 2003

①



$X, Y : f_{XY}(x,y) = \begin{cases} C & \text{se } (x,y) \in D \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

a. determinare le PDF marginali di X e Y

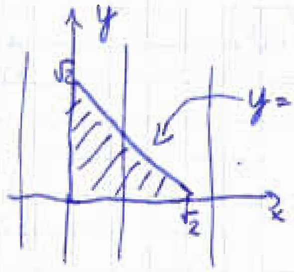
b. X e Y sono indipendenti?

$\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 1$

a. $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{XY}(x,y) = 1$ Volume = area di base × l'altezza

$1 \cdot C = 1 \Rightarrow C = 1$

$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in D \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



Da teoria $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$

$= \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{2} - x & \text{se } 0 < x < \sqrt{2} \\ 0 & \text{se } x > \sqrt{2} \end{cases}$ $\quad \int_0^{-x+\sqrt{2}} 1\,dy = \sqrt{2} - x$ $\quad \begin{cases} \sqrt{2} - x & \text{se } 0 < x < \sqrt{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

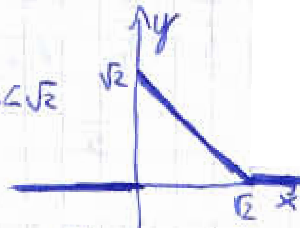
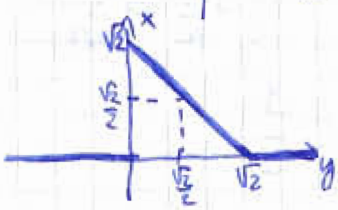


grafico simmetrico rispetto a $x = y$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = f_X(y) = \begin{cases} \sqrt{2} - y & \text{se } 0 < y < \sqrt{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



b. $f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ ma se faccio $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \neq 1 \to f_{XY}(x,y) = C$

<u>NO</u> non sono indipendenti

Basta che ci sia un punto in cui non vale che non sono indipendenti

② Viaggiatore → treno × Bologna → Orario teorico: 11.00

↳ non sa se sarà IC, IR, R. A priori ogni tipo ha la stessa probabilità di arrivare.

I ritardi accumulati sono V.A. $\sim exp\left(\frac{1}{\beta}\right)$, cioè $f_T(t) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{t}{\beta}} \cdot u(t)$

$\left(\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\frac{1}{\beta}} = \beta\right)$. $\beta_{IC} = 5'$ $\beta_{IR} = 10'$ $\beta_R = 20'$.

Il treno arriva alle 11:00 esattamente. Quali sono le probabilità che il treno sia IC, IR, R?

$t_0 = 11.00$ istante di arrivo teorico

$T_e = t_0 + T$ V.A. $\begin{cases} T_e = \text{arrivo effettivo} \\ T = \text{ritardo} \end{cases}$

Si sa che si verifica l'evento $\{T_e = t_0\} = \{T = 0\}$

$P(IC \mid T=0) = ?$ $\quad P(IR \mid T=0) = ?$ $\quad P(R \mid T=0) = 1 - P(IC \mid T=0) - P(IR \mid T=0)$?

$P(IC) = P(IR) = P(R) = \frac{1}{3}$

$\{T=0\}$ ha probabilità nulla perché T è continua

$\Rightarrow$ applico la formula di Bayes mista.

$$P(IC \mid T=0) = \frac{f_T(0 \mid IC) \cdot P(IC)}{f_T(0)}$$

$$f_T(t \mid IC) = \frac{1}{\beta_{IC}} e^{-\frac{t}{\beta_{IC}}} \cdot u(t)$$

$$f_T(0 \mid IC) = \frac{1}{\beta_{IC}}$$

$$f_T(t) \underset{\substack{PT \\ \text{per PDF}}}{=} f_T(t \mid IC) \cdot P(IC) + f_T(t \mid IR) \cdot P(IR) + f_T(t \mid R) \cdot P(R) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{\beta_{IC}} e^{-\frac{t}{\beta_{IC}}} + \frac{1}{\beta_{IR}} e^{-\frac{t}{\beta_{IR}}} + \frac{1}{\beta_R} e^{-\frac{t}{\beta_R}}\right] u(t)$$

$$f_T(0) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\beta_{IC}} + \frac{1}{\beta_{IR}} + \frac{1}{\beta_R}\right)$$

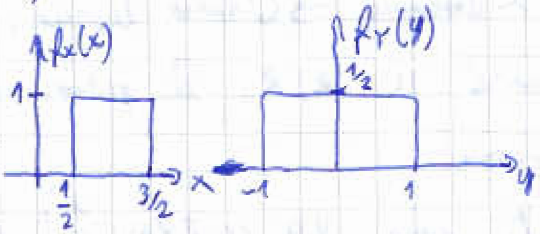
$$\frac{\frac{1}{\beta_{IC}} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\beta_{IC}} + \frac{1}{\beta_{IR}} + \frac{1}{\beta_R}\right)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{20}{4+2+1} = \frac{4}{7}$$

$$P(IR \mid T=0) = \frac{1}{10} \cdot \frac{20}{7} = \frac{2}{7} \qquad P(R \mid T=0) = 1 - \frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$$

(A CASA: Calcolare il ritardo t_{MIN} (minimo) per cui l'IC non è il + probabile (esprimere in funzione di t_{MIN})

ES. 3

X, Y V.A. indipendenti



Determinare la PDF di

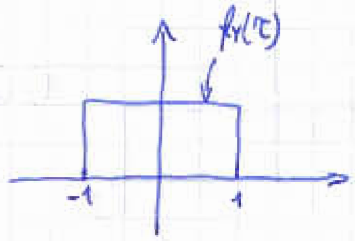
$Z = X - Y$.

$Z = X - Y = X + H$ con $H = -Y$

$$f_H(h) = \frac{f_Y(-h)}{|-1|} = f_Y(-h) \underset{\text{pari}}{=} f_Y(h)$$

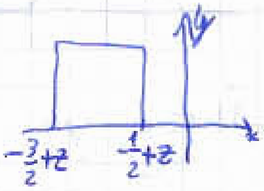
$f_Z(z) = (f_X \otimes \underset{f_Y}{\underbrace{f_H}})(z)$ Le altezze le trovo con la normalizzazione

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-\tau) \cdot \underset{\text{BLOCCATA}}{f_Y(\tau)}\, d\tau$$



A) ribaltamento di $f_X(x)$

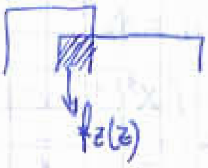
B) traslazione



Distinguo i vari casi:

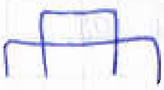
-  il prodotto è 0.

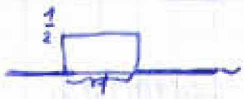
$z - 1/2 < -1 \qquad z \le -\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow f_Z(z) = 0.$

-  quando $\begin{cases} z - \frac{1}{2} > -1 \\ z - \frac{3}{2} < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z > -\frac{1}{2} \\ z \le \frac{1}{2} \end{cases} \quad -\frac{1}{2} < z \le \frac{1}{2}$

Il prodotto vale 0 fuori dall'intersezione e tra -1 e $z - \frac{1}{2}$ vale $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

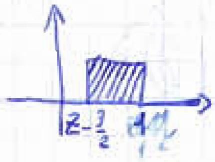
$$f_Z(z) = \int_{-1}^{z-\frac{1}{2}} 1 \cdot \frac{1}{2}\, d\tau = \frac{1}{2}\left[\left(z - \frac{1}{2}\right) - (-1)\right] = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{2}\right) = \frac{z}{2} + \frac{1}{4}$$

-  quando $\begin{cases} z - \frac{1}{2} < 1 \\ z - \frac{3}{2} > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z \le \frac{3}{2} \\ z > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \frac{1}{2} < z \le \frac{3}{2}$

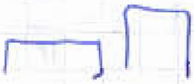


$$f_Z(z) = \frac{1}{2} = \int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} 1 \cdot \frac{1}{2}\, d\tau = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right)\right] = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

-  quando $\begin{cases} z - \frac{1}{2} > 1 \\ z - \frac{3}{2} \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z > \frac{3}{2} \\ z \le \frac{5}{2} \end{cases} \quad \frac{3}{2} < z \le \frac{5}{2}$

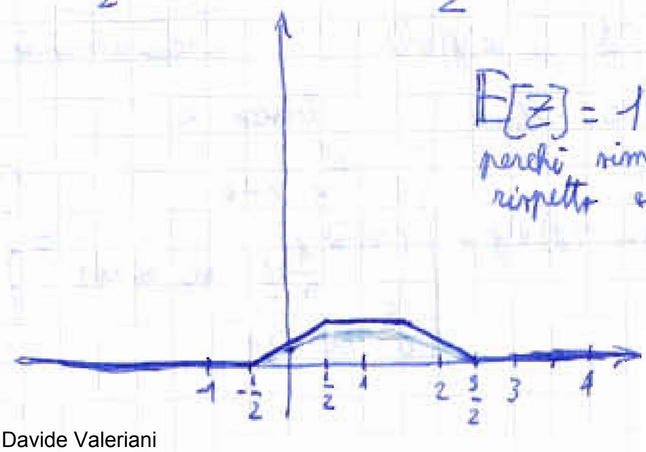


$$f_Z(z) = \int_{z-\frac{3}{2}}^{1} 1 \cdot \frac{1}{2}\, d\tau = \frac{1}{2}\left(1 - z + \frac{3}{2}\right) = -\frac{z}{2} + \frac{5}{4}$$

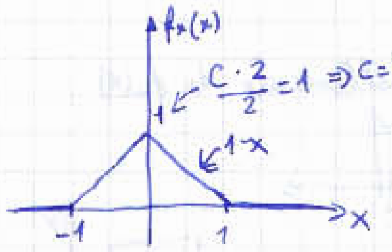
-  $f_Z(z) = 0$ quando $z - \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow z > \frac{5}{2}$

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \le -\frac{1}{2} \\ \frac{z}{2} + \frac{1}{4} & \text{se } -\frac{1}{2} < z \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{se } \frac{1}{2} < z \le \frac{3}{2} \\ -\frac{z}{2} + \frac{5}{4} & \text{se } \frac{3}{2} < z \le \frac{5}{2} \\ 0 & \text{se } z > \frac{5}{2} \end{cases}$$

$E[Z] = 1$
perché simmetrica rispetto a 1



④ X, Y indipendenti



A) calcolare la correlazione tra X e Y

B) Calcolare $Cov[X+Y, 3X]$

A) $E[X\cdot Y]$ → ho bisogno di $f_{XY}(x,y)$, ma X, Y indipendenti ⇒ la correlazione è il prodotto dei valori medi $= E[X]\cdot E[Y] \underset{PARI}{=} 0\cdot 0 = 0$.

B) $Cov[X+Y, 3X] \overset{BILIN.}{=} 3\underbrace{Cov[X,Y]}_{=0 \text{ indip.}} + 3Cov[X,X] = 3Cov[X] = \sigma_X^2$

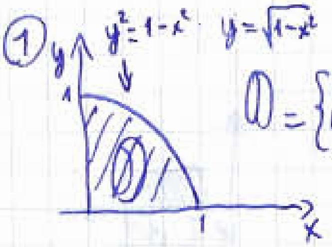
$\sigma_X^2 = E[X^2] - \underbrace{E[X]^2}_{=0} = E[X^2] \underset{\text{pari}}{=} 2\int_0^{+\infty} x^2\cdot f_X(x)\,dx = 2\int_0^1 x^2(1-x)\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1\right] =$

$= 2\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] = 2\cdot\frac{4-3}{12} = \frac{1}{6}$

PROBLEMA 13.5

30/05/08

2° COMPITINO 2004

①


$D = \{(x,y): x^2+y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$ X, Y PDF congiunta costante su D e nulla altrove

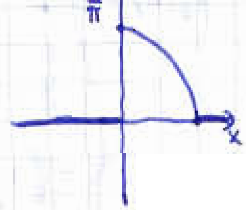
• determinare PDF marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ e la PDF condizionata $f_{Y|X}(y|x)$

•• detta R = distanza di (X,Y) dall'origine, determinare la PDF di R.

• $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} c & \text{se } (x,y)\in D \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ $\quad c = \underbrace{\iint_{\mathbb{R}^2} f_{XY}(x,y)}_{\text{area dominio per l'altezza } c.} = 1 \qquad \frac{\pi\cdot 1^2}{4}\cdot c = 1 \quad c = \frac{4}{\pi}$

$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} & \text{se } (x,y)\in D \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ blocco x

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{4}{\pi}dy & \text{se } 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{se } x>1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2} & \text{se } 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



② Due fabbriche di motori A, B. Il tempo di rottura è T.

A → $T \sim \text{Unif}(1,11)$ [anni]

B → $T \sim b \cdot \exp\left(-\frac{t}{6}\right) \mathcal{U}(t)$

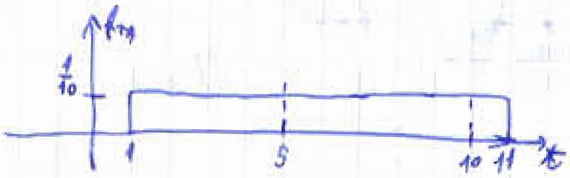
b ↓ coefficiente opportuno

1) calcola la probabilità che un motore fornito a caso da una delle due fabbriche sia in marcia dopo 5 anni

2) se il motore si rompe dopo 10 anni precisi, da quale fabbrica proviene con > probabilità.

$$b \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} b \cdot \exp\left(-\frac{t}{6}\right) dt = 1 \qquad b \cdot 6 \left[-e^{-\frac{t}{6}}\right]_0^{\infty} = 1 \qquad b = 1/6.$$

1.
$$f_T(t|A) = f_{T_A}(t) = \left[\mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-11)\right] \cdot \frac{1}{10}$$



$$f_T(t|B) = f_{T_B}(t) = \frac{1}{6} e^{-\frac{t}{6}} \mathcal{U}(t)$$

$$P\{T>5\} \stackrel{PT}{=} \underbrace{P\{T>5|A\}}_{[1-F_{T_A}(5)}\cdot \overbrace{P(A)}^{\frac{1}{2}} + \underbrace{P\{T>5|B\}}_{1-F_{T_B}(5)]} \cdot \overbrace{P(B)}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[\int_5^{+\infty} f_T(t|A)\,dt + \int_5^{+\infty} f_T(t|B)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_5^{11} \frac{1}{10}\,dt + \int_5^{+\infty} \frac{1}{6} e^{-\frac{t}{6}}\,dt\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{11-5}{10} + \left[-e^{-\frac{t}{6}}\right]_5^{+\infty}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{10} - 0 + e^{-\frac{5}{6}}\right) = \frac{3}{10} + \frac{e^{-\frac{5}{6}}}{2}.$$

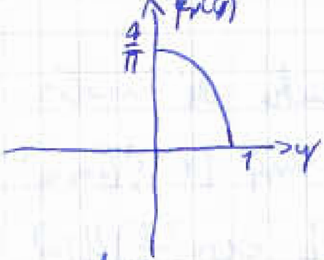
2. Si verifica $T=10$. $P(A|T=10) \stackrel{?}{\gtrless} P(B|T=10)$, con $P(B|T=10) = 1 - P(A|T=10)$

$$P(A|T=10) \stackrel{\text{BAYES MISTA}}{=} \frac{f_T(10|A) \cdot P(A)}{f(10)} = \frac{f_T(10|A) \cdot P(A)}{f_T(10|A) \cdot P(A) + f_T(10|B) \cdot P(B)} = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} e^{-\frac{10}{6}} \cdot \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{20} + \frac{1}{12} e^{-\frac{10}{6}}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{3} e^{-\frac{10}{6}}} = \frac{1}{1 + \frac{5}{3} e^{-\frac{5}{3}}} \cong 0{,}76 \qquad P(B|T=10) \simeq 0{,}24$$

È più probabile che il motore venga da A.

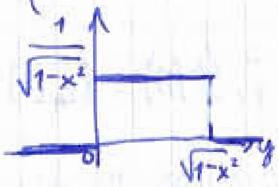
$$f_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{se } y\le 0\\ \int_0^{\sqrt{1-y^2}}\frac{4}{\pi}\,dx & \text{se } 0\le y\le 1\\ 0 & \text{se } y>1\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{1-y^2}\cdot\frac{4}{\pi} & \text{se } 0\le y\le 1\\ 0 & \text{se altrove}\end{cases}$$



simmetrica rispetto alla bisettrice del 1° quadrante

Le due VA non sono indipendenti anche perchè, essendo la PDF congiunta costante, conoscendo x riesco a dire entro dove varia y e dipende quindi da x.

$$\underset{\text{VARIABILE}\ \ \text{DATO}}{f_Y(y|x)}=\begin{cases}\dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} & \text{se } (x,y)\in D\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{\frac{4}{\pi}}{\frac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2}} & \text{se } (x,y)\in D\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$



se $x\to 0^+$, $f_Y(y|x)\to\delta(y)$

$$\begin{cases}R=\sqrt{x^2+y^2}\\ W=X\end{cases}$$ Complicato con le VA ausiliarie

$$\begin{cases}R=\sqrt{x^2+y^2}\\ \Theta=\arctan^*(x,y)\end{cases}$$ TRASFORMAZIONE BIETTIVA

Si sa da teoria che $f_{R\Theta}(r,\theta)=\begin{cases}r\cdot f_{XY}(r\cos\theta,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta) & r>0,\ -\pi\le\theta\le\pi\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$

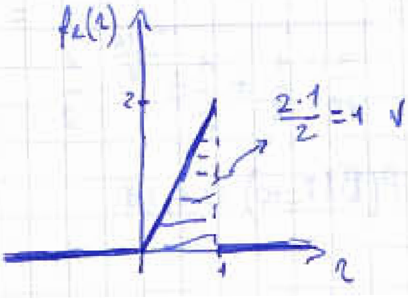
inverso dello Jacobiano

l'intervallo specifico NON conta a patto che sia di ampiezza 2π

$f_{XY}(x,y)$ non nulla solo se $(x,y)\in D$, cioè $0\le r\le 1$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

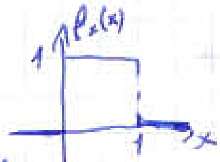
$$=\begin{cases}r\cdot\frac{4}{\pi} & \text{se } 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$

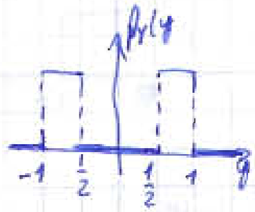
$$\Rightarrow f_R(r)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{R\Theta}(r,\theta)\,d\theta=\int_0^{\pi/2}r\cdot\frac{4}{\pi}\,d\theta=r\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\begin{cases}2r & \text{se } 0\le r\le 1\\ 0 & \text{se } r\notin(0,1)\end{cases}$$



③ Siano date X, Y indipendenti con le seguenti PDF:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 1 & -1 \le y < -\frac{1}{2} \text{ e } \frac{1}{2} \le y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



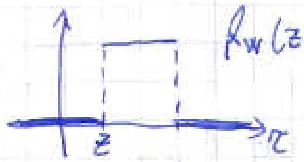


Ricavare la PDF di $Z = Y - X$

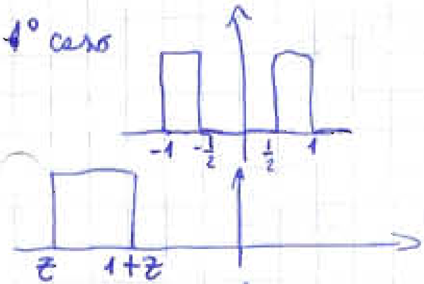
$Z = Y + W$ con $W = -X$ $\qquad f_W(w) = f_X(-w)$

$$f_Z(z) = \left(f_Y \otimes f_W\right)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f_W(z-\tau)}_{\text{muove}} \cdot \underbrace{f_Y(\tau)}_{\text{ferma}}\, d\tau$$

RIBALTAMENTO
TRASLAZIONE
DI Z

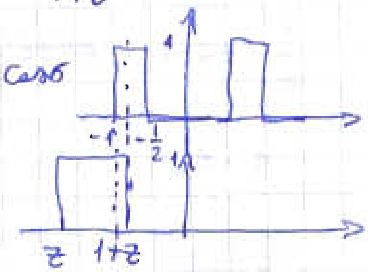


1° caso



se $1 + z < -1 \Rightarrow z < -2 \quad f_Z(z) = 0$

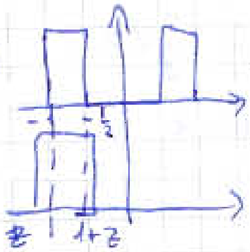
2° caso



se $\begin{cases} 1 + z > -1 \\ 1 + z < -\frac{1}{2} \end{cases}$ cioè $-2 < z < -\frac{3}{2}$

$$f_Z(z) = \int_{-1}^{1+z} \underbrace{1 \cdot 1}_{\text{prodotto delle PDF}} \cdot d\tau = 1 + z - (-1) = z + 2$$

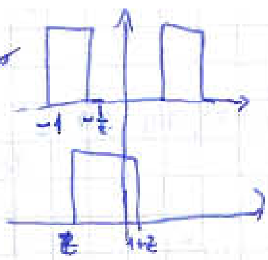
3° caso



se $\begin{cases} 1 + z > -\frac{1}{2} \\ z < -1 \end{cases}$ cioè $-\frac{3}{2} < z < -1$

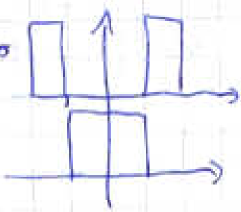
$$f_Z(z) = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} 1 \cdot 1\, d\tau = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$$

4° caso



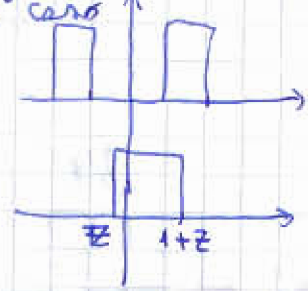
$\begin{cases} z > -1 \\ z < -\frac{1}{2} \end{cases}$ cioè $-1 < z < -\frac{1}{2}$ $\qquad f_Z(z) = \int_{z}^{-\frac{1}{2}} d\tau = -\frac{1}{2} - z$

5° caso



$\begin{cases} z = -\frac{1}{2} \\ 1 + z = \frac{1}{2} \end{cases}$ cioè $z = -\frac{1}{2}$ $\qquad f_Z(z) = 0$ oppure lo includo

6° caso



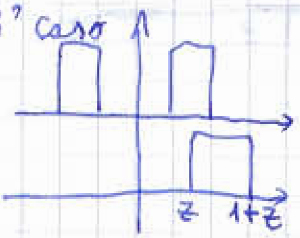
$$\begin{cases} 1+z > \frac{1}{2} & \text{cioè } -\frac{1}{2} < z < 0 \\ 1+z < 1 \end{cases}$$

$$f_z(z) = \int_{-\frac{1}{2}}^{1+z} d\tau = 1+z - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + z$$

7° caso

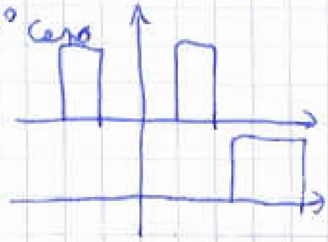
$$\begin{cases} z < \frac{1}{2} & \text{cioè } 0 < z < \frac{1}{2} \\ z+1 > 1 \end{cases} \qquad f_z(z) = \int_{+\frac{1}{2}}^{1} d\tau = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

8° caso



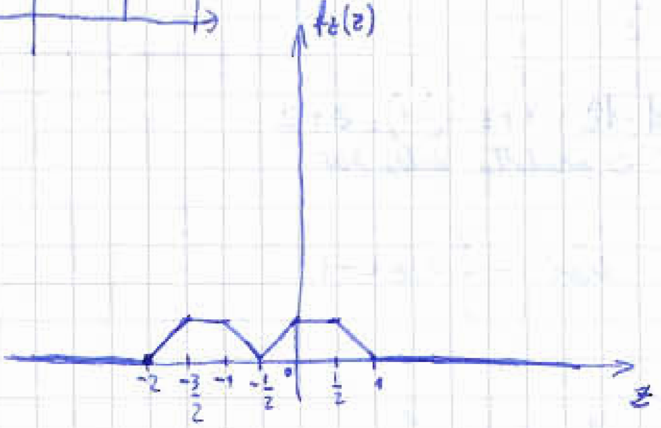
$$\begin{matrix} z > \frac{1}{2} \\ z < 1 \end{matrix} \qquad \text{cioè } \frac{1}{2} < z < 1 \qquad f_z(z) = \int_{z}^{1} d\tau = 1 - z$$

9° caso



$$z > 1 \qquad f_z(z) = 0$$

$$f_z(z) = \begin{cases} z+2 & -2 < z \leq -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} < z \leq -1 \text{ e } 0 < z \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} - z & -1 < z \leq -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + z & -\frac{1}{2} < z \leq 0 \\ 1 - z & \text{se } \frac{1}{2} < z \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$z = -\frac{1}{2}$ punto di simmetria $\Rightarrow$ il comportamento di z prima di $-\frac{1}{2}$ è speculare a quello di $z > \frac{1}{2}$.

④ $X \sim Unif\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\quad Y = -2X + 3$ $\qquad$ 1. $E[XY]$ $\qquad$ 2. $Cov[2X+5, 4Y-3]$

1. $E[XY] = E[X(-2X+3)] = -2E[X^2] + 3\underbrace{E[X]}_{=0 \text{ PDF PARI}} = -2 \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 \, dx = -2\left(\frac{x^3}{3}\right)_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -2 \cdot \overset{Var[X]}{\frac{1}{12}} = -\frac{1}{6}$.

2. $Cov[2X+5, 4Y-3] = 8\,Cov[XY] + \underbrace{Cov[2X,-3]}_{=0} + \underbrace{Cov[5,4Y]}_{=0} + \underbrace{Cov[5,-3]}_{=0} =$

$= 8\,Cov[X, -2X+3] = -16\,Cov[X,X] = -16\,Var[X] = -16 \cdot \frac{1}{12} = -\frac{4}{3}$